

# ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ПЛАЗМЫ

*Под редакцией М. А. ЛЕОНТОВИЧА*

ВЫПУСК 3



ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО ЛИТЕРАТУРЫ  
ПО АТОМНОЙ НАУКЕ И ТЕХНИКЕ  
ГОСУДАРСТВЕННОГО КОМИТЕТА  
ПО ИСПОЛЬЗОВАНИЮ АТОМНОЙ ЭНЕРГИИ СССР

Москва 1963

*В третьем выпуске серии сборников «Вопросы теории плазмы» излагаются теория линейных колебаний плазмы и основы теории слаботурбулентной плазмы. Исследуются колебания и их взаимодействие с зарядами в однородной плазме. Излагается теория неустойчивостей неоднородной плазмы, находящейся в магнитном поле. Рассматривается влияние развивающихся колебаний на функцию распределения зарядов; изучается взаимодействие плазменных волн.*

*Кроме того, третий выпуск содержит работу по исследованию симметричных магнитогидродинамических течений.*

---

## ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В ПЛАЗМЕ

В. Д. Шафранов

### Введение

Предлагаемая вниманию читателя работа представляет собой попытку дать систематическое изложение основных вопросов теории линейных колебаний однородной плазмы.

Большая часть материала (§ 1—12) была издана ранее в виде препринта.\* При подготовке настоящего издания в этой части сделаны небольшие дополнения: добавлены задачи к § 7 и 9; при записи тензора электрической проницаемости вместо функции  $W(x)$  введена для наиболее компактной записи формул функция  $Z(x) = -i\sqrt{\pi x}W(x)$  и др. Кроме того, при подготовке к печати добавлены вновь три параграфа (§ 13—15) и приложение III.

Колебания плазмы, как известно, описываются самосогласованными уравнениями движения частиц (или соответствующими кинетическими уравнениями), с одной стороны, и уравнениями Максвелла, с другой [1—12]. Однако в случае линейных колебаний всю эту систему уравнений можно свести к одним лишь уравнениям Максвелла, в которых плотности заряда и тока выражаются линейно через электрическое поле с помощью рассчитанного заранее (из уравнений движения) тензора электрической проницаемости  $\epsilon_{\alpha\beta}(k, \omega)$  [13]. Такой подход, применявшийся сначала лишь при изучении колебаний «холодной» плазмы (когда скорость теплового движения зарядов считается малой по сравнению с фазовой скоростью электромагнитной волны), впоследствии стал все более широко использоваться и при исследовании колебаний высокотемпературной плазмы [14—24]. В настоящее время он с успехом применяется и при исследовании колебаний неоднородной плазмы (см. работу А. Б. Михайловского в настоящем выпуске).

С помощью тех же уравнений Максвелла, в которые включены «микроскопические токи», можно описывать не только средние, но и флуктуационные («тепловые») поля [25—28]. Однообразный учет наряду с поперечным также и продольного электрического

\* В. Д. Шафранов. Электромагнитные волны в плазме. Препринт ИАЭ-194, 1960.

поля позволяет сравнительно просто рассчитывать эффекты, связанные с кулоновским взаимодействием зарядов (торможение и рассеяние заряда, движущегося в плазме, флуктуации плотности заряда и т. п.). Для описания флуктуационных явлений, кроме тензора электрической проницаемости, очень часто достаточно знать только корреляционную функцию микротоков  $G_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega)$ . Для обычно рассматриваемой не очень плотной плазмы эта функция легко рассчитывается. В термодинамически равновесной плазме (т. е. при максвелловском распределении зарядов по скоростям с одной температурой) тензор  $G_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega)$  однозначно связан с антиэрмитовой частью тензора электрической проницаемости  $\epsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega)$ . Такой способ описания флуктуаций, развитый М. А. Леонтовичем и С. М. Рытовым, обладает тем достоинством, что расчет различного рода флуктуаций сводится к решению хорошо известных уравнений Максвелла. При термодинамическом равновесии результаты, выраженные через тензор  $\epsilon_{\alpha\beta}$ , пригодны не только для плазмы, но имеют и более общую значимость (см. § 90 в работе [25]). Эквивалентность используемого метода описания флуктуаций и метода, основанного на уравнениях для корреляционных функций [29—35] в случае плазмы, показывается в приложении III.

Следует заметить, что с помощью корреляционной функции микротоков легко рассчитывается интенсивность излучения (а также сила радиационного трения, электромагнитная энергия и т. п.) одиночного заряда. Смысл использования корреляционной функции микротоков для расчета усредненных характеристик в этом случае состоит в замене усреднения по времени усреднением по фазам (т. е. усреднением по ансамблю невзаимодействующих частиц).

В данной работе автор не стремился к полному освещению материала и к строгому его изложению. Главной задачей было как можно быстрее ввести в курс дела желающего ознакомиться с теорией электромагнитных колебаний в плазме и подготовить его для изучения более трудных задач по исследованию неустойчивостей неоднородной плазмы и их влияния на состояние плазмы. Соответственно приведенный перечень литературы является далеко не полным. Обширный материал по теории электромагнитных волн в плазме и по общим вопросам электродинамики плазмы имеется в монографиях В. Л. Гинзбурга [36], В. П. Силина и А. А. Рухадзе [37], а также в недавно вышедшей книге Т. Х. Стикса [38], в которых указана и более обширная литература.

## § 1. Дисперсионное уравнение (общие соотношения)

В случае, когда физические величины, определяющие состояние плазмы, мало отклоняются от своих стационарных значений ( $q = q_0 + q_1$ ,  $q_1 \ll q_0$ ), уравнения, описывающие поведение плазмы, могут быть линеаризованы, и в ряде случаев удастся получить их решение. Если в стационарном состоянии плазма

однородна ( $\nabla q_0 = 0$ ), то линеаризованные уравнения получаются с постоянными коэффициентами. В этом случае они могут быть решены в общем виде, например, методом Фурье, т. е. путем разложения величин  $q_1(\mathbf{r}, t)$  в пространственно-временной ряд или интеграл Фурье. При этом обычно бывает достаточно ограничиться исследованием решения в виде плоской волны  $q_1(\mathbf{k}, \omega) e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}$  (подробнее об этом см. в § 7). Если линеаризованные уравнения однородны (отсутствуют сторонние источники поля), то для амплитуд  $q_1(\mathbf{k}, \omega)$  получается алгебраическая система однородных уравнений, имеющая, как известно, нетривиальное решение при условии, что ее детерминант обращается в нуль. Это условие называется дисперсионным уравнением. Оно связывает между собой значения частоты  $\omega$  и волнового вектора  $\mathbf{k}$ . В зависимости от постановки задачи либо  $\omega$ , либо  $\mathbf{k}$  могут быть заданы, тогда дисперсионное уравнение определяет в первом случае зависимость  $\mathbf{k}(\omega)$ , во втором  $\omega(\mathbf{k})$ , причем обе эти величины соответственно могут быть комплексными

$$k = k_1(\omega) + ik_2(\omega); \quad (1.1)$$

$$\omega(k) = \omega_1(k) - i\omega_2(k). \quad (1.2)$$

Задание действительного значения  $\omega$  соответствует задаче о распространении в плазме волн, генерируемых с этой частотой. Вместо  $k$  в этом случае принято вводить показатель преломления  $N$ :

$$k = \frac{\omega}{c} N = \frac{\omega}{c} (p + iq). \quad (1.3)$$

Пусть волна распространяется вдоль оси  $z$  ( $k_x = k_y = 0$ ,  $k_z = k$ ). Тогда  $e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} = e^{i\frac{\omega}{c} p (z - \frac{c}{p} t) - \frac{\omega}{c} qz}$ . Как видно, действительная часть показателя преломления  $p$  определяет фазовую скорость волны  $v_\phi = \frac{c}{p}$ , а мнимая часть  $q$ , в зависимости от ее знака, определяет затухание или нарастание волны с расстоянием.

Задание действительного вектора  $\mathbf{k}$  соответствует задаче о собственных колебаниях плазмы. В этом случае  $e^{i(kz - \omega t)} = e^{i(kz - \omega_1 t) - \omega_2 t}$ . Действительная часть частоты  $\omega_1$  определяет собственную частоту колебаний с заданной пространственной формой, мнимая часть  $\omega_2$ , в зависимости от знака, определяет скорость затухания или нарастания колебаний.

Для получения дисперсионного уравнения необходимо решить уравнения Максвелла совместно с уравнениями, описывающими движение зарядов. Удобнее сначала найти из уравнений движения связь средней плотности тока с электрическим полем. Поскольку эта связь линейна, то в общем случае она может быть выражена в виде

$$j_\alpha = \sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega) E_\beta, \quad (1.4)$$

где  $\sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega)$  — «тензор комплексной проводимости».

В рассматриваемом случае гармонических колебаний удобно включить плотность тока в электрическую индукцию:

$$\frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (1.5)$$

или, учитывая зависимость  $e^{-i\omega t}$ ,

$$j_\alpha = -i \frac{\omega}{4\pi} (D_\alpha - E_\alpha) = -i \frac{\omega}{4\pi} (\varepsilon_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta}) E_\beta. \quad (1.6)$$

Здесь введен «тензор электрической проницаемости»  $\varepsilon_{\alpha\beta}$ , связывающий фурье-компоненты  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{E}$ :

$$D_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta} E_\beta. \quad (1.7)$$

Тензор  $\varepsilon_{\alpha\beta}$  связан, согласно выражениям (1.4) и (1.6), с тензором  $\sigma_{\alpha\beta}$  соотношением

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + i \frac{4\pi}{\omega} \sigma_{\alpha\beta}. \quad (1.8)$$

Заметим, что слагаемое  $\delta_{\alpha\beta}$  связано, как это видно из выражений (1.5) и (1.6), с учетом тока смещения  $\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$  и для продольных волн ( $\text{div } \mathbf{E} = 4\pi q \neq 0$ ) с возникновением объемного заряда. Пренебрежение электрическим зарядом в плазме соответствует, таким образом, условию  $|\varepsilon_{\alpha\beta}| \gg 1$ .

Тензор  $\varepsilon_{\alpha\beta}$  (или  $\sigma_{\alpha\beta}$ ) полностью определяет характер малых колебаний среды, так как дисперсионное уравнение зависит только от  $\varepsilon_{\alpha\beta}$ . Отметим, что наличие поглощающих свойств среды устанавливается без решения дисперсионного уравнения, по одному виду тензора  $\varepsilon_{\alpha\beta}$ . Действительно, при слабом затухании, когда волна является почти монохроматической, энергия электромагнитного поля, поглощаемого в среде, определяется средним значением по периоду колебаний скалярного произведения  $\mathbf{j}$  и  $\mathbf{E}$ :

$$Q = \overline{\text{Re } \mathbf{j} \cdot \text{Re } \mathbf{E}} = \frac{1}{2} \text{Re } \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}^* = \frac{1}{4} (j_\alpha E_\alpha^* + j_\alpha^* E_\alpha). \quad (1.9)$$

Подставляя сюда выражение для тока (1.4) и меняя индексы во втором слагаемом, получим

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{4} (\sigma_{\alpha\beta} E_\alpha^* E_\beta + \sigma_{\beta\alpha}^* E_\beta E_\alpha^*) = \frac{1}{2} \sigma'_{\alpha\beta} E_\alpha^* E_\beta = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\omega}{4\pi} \varepsilon''_{\alpha\beta} E_\alpha^* E_\beta, \end{aligned} \quad (1.10)$$

где  $\sigma'_{\alpha\beta}$  — эрмитовская, а  $i\varepsilon''_{\alpha\beta}$  — антиэрмитовская части тензоров  $\sigma_{\alpha\beta}$  и  $\varepsilon_{\alpha\beta}$  соответственно:

$$\sigma'_{\alpha\beta} = \frac{\sigma_{\alpha\beta} + \sigma_{\beta\alpha}^*}{2}; \quad i\varepsilon''_{\alpha\beta} = \frac{\varepsilon_{\alpha\beta} - \varepsilon_{\beta\alpha}^*}{2}. \quad (1.11)$$

Поглощение связано, таким образом, с антиэрмитовской частью тензора электрической проницаемости.

Запишем уравнения Максвелла, учитывая пространственно-временную зависимость  $e^{i(kr - \omega t)}$ :

$$[\mathbf{kB}] = -\frac{\omega}{c} \mathbf{D}; \quad (1.12)$$

$$[\mathbf{kE}] = \frac{\omega}{c} \mathbf{B}. \quad (1.13)$$

Уравнения  $\operatorname{div} \mathbf{D} = 0$  и  $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ , имеющие теперь вид условия поперечности векторов  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{B}$  вектору  $\mathbf{k}$  ( $\mathbf{kD} = \mathbf{kB} = 0$ ), удовлетворяются, очевидно, как следствие этих уравнений. Исключая из уравнений (1.12) и (1.13) магнитное поле, получим векторное уравнение

$$k^2 \mathbf{E} - \mathbf{k}(\mathbf{kE}) - \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{D} = 0. \quad (1.14)$$

Вводя показатель преломления  $N = \frac{kc}{\omega}$ , перепишем это векторное уравнение в виде  $\mathbf{D} = N^2 \mathbf{E}_\perp$ , или

$$\mathbf{D}_\perp = N^2 \mathbf{E}_\perp; \quad \mathbf{D}_\parallel = 0. \quad (1.14a)$$

Значки  $\perp$  и  $\parallel$  относятся к компонентам вектора, соответственно перпендикулярной к вектору  $\mathbf{k}$  и параллельной ему.

Пусть вектор  $\mathbf{k}$  направлен по оси  $z$ . Расписывая уравнение (1.14) в компонентах, получим

$$\left. \begin{aligned} (N^2 - \epsilon_{xx}) E_x - \epsilon_{xy} E_y - \epsilon_{xz} E_z &= 0; \\ -\epsilon_{yx} E_x + (N^2 - \epsilon_{yy}) E_y - \epsilon_{yz} E_z &= 0; \\ -\epsilon_{zx} E_x - \epsilon_{zy} E_y - \epsilon_{zz} E_z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.15)$$

Рассмотрим эту систему уравнений сначала для случая изотропной плазмы (плазма без магнитного поля). Единственным выделенным направлением в этом случае является направление распространения волны  $\mathbf{k}$ . Поэтому тензор электрической проницаемости должен иметь вид

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \epsilon_\perp \left( \delta_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2} \right) + \epsilon_\parallel \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2}. \quad (1.16)$$

В системе координат с осью  $z$ , направленной вдоль волнового вектора, этот тензор диагональный:  $\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = \epsilon_\perp$ ;  $\epsilon_{zz} = \epsilon_\parallel$ ; остальные компоненты равны нулю. Уравнения (1.15) можно записать следующим образом:

$$(N^2 - \epsilon_\perp) \mathbf{E}_\perp = 0; \quad (1.17)$$

$$\epsilon_\parallel \mathbf{E}_\parallel = 0, \quad (1.18)$$

где  $\mathbf{E}_\perp = \{E_x, E_y, 0\}$  — электрический вектор, перпендикулярный к волновому вектору, а  $\mathbf{E}_\parallel$  — параллельный ему. Из последних уравнений видно, что продольные колебания не зависят от

поперечных. Дисперсионное уравнение для поперечных волн

$$N^2 = \varepsilon_{\perp}, \quad (1.19)$$

а для продольных

$$\varepsilon_{\parallel} = 0 \quad (1.20)$$

(дисперсионные уравнения исследуются ниже после получения конкретных выражений для  $\varepsilon_{\alpha\beta}$ ).

Рассмотрим теперь систему уравнений (1.15) для случая плазмы в магнитном поле. Тензор электрической проницаемости обычно вычисляется в системе координат  $x_0, y_0, z_0$ , ось  $z_0$  которой направлена вдоль магнитного поля, а ось  $x_0$  лежит в одной плоскости с векторами  $\mathbf{B}_0$  и  $\mathbf{k}$  (рис. 1). В этой системе координат тензор  $\varepsilon_{\alpha\beta}$  имеет вид (см. § 9)

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^0 = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & ig & \xi \\ -ig & \varepsilon_2 & if \\ \xi & -if & \eta \end{pmatrix}, \quad (1.21)$$

причем величины  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \eta, g, f, \xi$  являются действительными числами, если нет поглощения. Для холодной плазмы ( $T = 0$ ) компоненты  $\xi$

и  $f$  обращаются в нуль (см. § 3). В системе координат  $x, y, z$  (с осью  $z$ , направленной по  $\mathbf{k}$ ), для которой записана система уравнений (1.15), тензор  $\varepsilon_{\alpha\beta}$  выражается через  $\varepsilon_{\alpha\beta}^0$  по формулам преобразования тензоров. Пусть  $\theta$  — угол между векторами  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{k}$ . Тогда компоненты  $\varepsilon_{\alpha\beta}$  будут

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \varepsilon_1 \cos^2 \theta + \eta \sin^2 \theta - \xi \sin 2\theta; \\ \varepsilon_{xy} &= -\varepsilon_{yx} = i(g \cos \theta + f \sin \theta); \\ \varepsilon_{xz} &= \varepsilon_{zx} = (\varepsilon_1 - \eta) \sin \theta \cdot \cos \theta + \xi \cos 2\theta; \\ \varepsilon_{yy} &= \varepsilon_2; \\ \varepsilon_{yz} &= -\varepsilon_{zy} = i(f \cos \theta - g \sin \theta); \\ \varepsilon_{zz} &= \varepsilon_1 \sin^2 \theta + \eta \cos^2 \theta + \xi \sin 2\theta. \end{aligned} \right\} \quad (1.22)$$

В общем случае поперечные и продольные колебания, как это видно из системы (1.15), не разделяются. Действительно, для того, чтобы они разделялись, необходимо выполнение условий  $\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx} = 0$  и  $\varepsilon_{yz} = -\varepsilon_{zy} = 0$ . Эти условия выполняются только в единственном случае продольного распространения волн  $\theta = 0$  (как будет видно ниже, при  $\theta = 0$  компоненты  $\xi = f = 0$ ). Однако и в общем случае анизотропной плазмы имеются области частот, в которых отношение продольной компоненты электрического поля в волне к поперечной становится очень большим, так что можно и здесь говорить о продольных колебаниях. Как видно из уравнений (1.14а) и (1.15), такая ситуация возникает для корот-



ких волн  $N^2 \rightarrow \infty$  при  $\varepsilon_{zz} = 0$ . Поэтому приближенное дисперсионное уравнение для продольных колебаний

$$\varepsilon_{zz} = \varepsilon_1 \sin^2 \theta + \eta \cos^2 \theta + \xi \sin 2\theta = 0. \quad (1.23)$$

Его можно получить и непосредственно из уравнений Максвелла, если положить  $\text{rot } \mathbf{E} = 0$ , т. е. для фурье-компонент,  $\mathbf{E} = \frac{\mathbf{k}}{k} E$ . Тогда условие  $\mathbf{kD} = 0$  можно записать в форме уравнения (1.18)

$$\varepsilon_{\parallel} = \frac{k_{\alpha} k_{\beta}}{k^2} \varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon_{zz}.$$

Общее дисперсионное уравнение (равенство нулю детерминанта системы (1.15)) имеет вид

$$AN^4 + BN^2 + C = 0. \quad (1.24)$$

Коэффициенты  $A$ ,  $B$ ,  $C$  выражаются формулами

$$\left. \begin{aligned} A &= \varepsilon_{zz} = \varepsilon_1 \sin^2 \theta + \eta \cos^2 \theta + \xi \sin 2\theta; \\ B &= (g \sin \theta - f \cos \theta)^2 + \xi^2 (\cos^2 2\theta + \sin^4 \theta) - \\ &\quad - \varepsilon_1 \eta - \varepsilon_2 (\varepsilon_1 \sin^2 \theta + \eta \cos^2 \theta + \xi \sin 2\theta); \\ C &= \varepsilon_1 \varepsilon_2 \eta - \eta g^2 - \varepsilon_1 f^2 - \varepsilon_2 \xi^2 - 2g f \xi. \end{aligned} \right\} (1.24a)$$

Два формальных решения уравнения (1.24) мы будем обозначать через  $\varepsilon_l$  ( $l = 1; 2$ )\*

$$N^2 = \varepsilon_l = -\frac{B}{2A} \pm \frac{\sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \quad (1.25)$$

или в несколько иной форме

$$\varepsilon_l = \frac{1}{2} (\eta_{xx} + \eta_{yy}) \pm \sqrt{\frac{(\eta_{xx} - \eta_{yy})^2}{4} + \eta_{xy} \eta_{yx}}. \quad (1.25a)$$

Здесь введены следующие величины, через которые, как будет видно ниже, выражаются компоненты векторов поляризации:

$$\left. \begin{aligned} \eta_{xx} &= \varepsilon_{xx} - \frac{\varepsilon_{xz} \varepsilon_{zx}}{\varepsilon_{zz}} = \frac{\varepsilon_1 \eta - \xi^2}{\varepsilon_1 \sin^2 \theta + \eta \cos^2 \theta + \xi \sin 2\theta}; \\ \eta_{xy} &= -\eta_{yx} = \varepsilon_{xy} - \frac{\varepsilon_{xz} \varepsilon_{zy}}{\varepsilon_{zz}} = \\ &= i \frac{(g\eta + f\xi) \cos \theta + (g\xi + f\varepsilon_1) \sin \theta}{\varepsilon_1 \sin^2 \theta + \eta \cos^2 \theta + \xi \sin 2\theta}; \\ \eta_{yy} &= \varepsilon_{yy} - \frac{\varepsilon_{yz} \varepsilon_{zy}}{\varepsilon_{zz}} = \\ &= \frac{\varepsilon_2 (\varepsilon_1 \sin^2 \theta + \eta \cos^2 \theta) - g^2 \sin^2 \theta + (\varepsilon_2 \xi + fg) \sin 2\theta - f^2 \cos^2 \theta}{\varepsilon_1 \sin^2 \theta + \eta \cos^2 \theta + \xi \sin 2\theta}. \end{aligned} \right\} (1.26)$$

\* Формальные потому, что коэффициенты  $A$ ,  $B$ ,  $C$  зависят от  $N^2$ .

Если тензор  $\epsilon_{\alpha\beta}$  не зависит от  $\mathbf{k}$  (в случае плазмы это означает, как мы увидим ниже, пренебрежение тепловым движением зарядов), то по формулам (1. 25), (1. 25а)  $N^2$  определяется в явном виде.

Два полученных значения квадрата показателя преломления (1. 25) относятся соответственно к двум типам волн, распространяющихся в анизотропной среде. Волны одного типа принято называть обыкновенными, другого типа — необыкновенными. Для выяснения вопроса о поляризации этих волн получим выражение для  $N^2$  несколько иным путем.

Обозначим через  $i\alpha_x$  и  $i\alpha_z$  отношение  $x$ - и  $z$ -компонент вектора  $\mathbf{E}$  к его  $y$ -компоненте:

$$\mathbf{E} = E_y \{i\alpha_x, 1, i\alpha_z\}. \quad (1. 27)$$

Из последнего уравнения системы (1. 15)  $\alpha_z$  выражается через  $\alpha_x$ :

$$i\alpha_z = i\alpha_x \epsilon_{zx} / \epsilon_{zz} - \epsilon_{zy} / \epsilon_{zz}. \quad (1. 28)$$

Исключив  $\alpha_z$  из первых двух уравнений (1. 15), получим

$$\left. \begin{aligned} (N^2 - \eta_{xx}) i\alpha_x - \eta_{xy} &= 0; \\ -\eta_{xy} i\alpha_x + N^2 - \eta_{yy} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1. 29)$$

Отсюда следует выражение  $N^2$  через отношение компонент вектора  $\mathbf{E}$ :

$$N^2 = \frac{\eta_{xy}}{i\alpha_x} + \eta_{xx} = \eta_{yy} + i\alpha_x \eta_{yx}. \quad (1. 30)$$

Для величины  $\alpha_x$ , характеризующей поляризацию волны, получается квадратное уравнение

$$\alpha_x^2 + i \frac{\eta_{xx} - \eta_{yy}}{\eta_{yx}} \alpha_x + \frac{\eta_{xy}}{\eta_{yx}} = 0. \quad (1. 31)$$

Соответственно двум значениям  $\alpha_x$ , определяемым этим уравнением, имеются две волны  $\mathbf{E}_1$  и  $\mathbf{E}_2$ , каждая, согласно формулам (1. 30), со своим показателем преломления. Поскольку  $\alpha_{x1} + \alpha_{x2} = (\eta_{xx} - \eta_{yy}) / i\eta_{yx}$  и  $\alpha_{x1}\alpha_{x2} = \eta_{xy} / \eta_{yx}$ , то из выражений (1. 30) для  $N^2$  нетрудно получить, что

$$N_1^2 + N_2^2 = \eta_{xx} + \eta_{yy}; \quad N_1^2 N_2^2 = \eta_{xx} \eta_{yy} - \eta_{ly} \eta_{yx}.$$

Отсюда следует, что  $N_{1,2}^2$  определяется уравнением (1. 24), полученным непосредственно из дисперсионного уравнения.

Заметим, что, как это вытекает из выражений (1. 26), свободный член в уравнении (1. 31) для  $\alpha_x$  равен  $\eta_{xy} / \eta_{yx} = -1$ . Следовательно,

$$\alpha_{x1} \alpha_{x2} = -1. \quad (1. 32)$$

В отсутствие поглощения  $\eta_{yx}$  — мнимая, а  $\eta_{yy}$  и  $\eta_{xx}$  — действительные величины. Следовательно, оба корня  $\alpha_{x1}$  и  $\alpha_{x2}$ , а также

$\alpha_{z1}$  и  $\alpha_{z2}$  — действительные числа. Электрический вектор волны данной поляризации можно представить в виде суммы двух векторов: один направлен по оси  $y$ , другой, перпендикулярный к первому, лежит в плоскости  $xz$  и сдвинут по фазе на  $\pi/2$  относительно первого:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}^{(1)} + i\mathbf{E}^{(2)}; \\ \mathbf{E}^{(1)} &= E_y \{0, 1, 0\}; \quad \mathbf{E}^{(2)} = E_y \{\alpha_x, 0, \alpha_z\}. \end{aligned} \right\} \quad (1.33)$$

Эти два вектора являются, очевидно, полуосями эллипса, который описывается концом электрического вектора  $\mathbf{E}$  (рис. 2). Таким образом, обыкновенная и необыкновенная волны обладают в общем

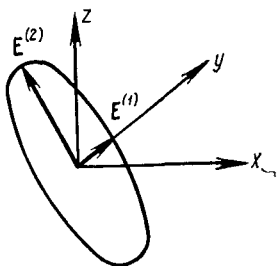


Рис. 2.

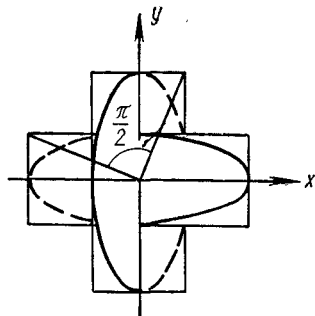


Рис. 3.

случае эллиптической поляризации. Поперечная компонента вектора  $\mathbf{E}$  также, очевидно, обладает эллиптической поляризацией, причем полуоси соответствующего эллипса

$$\mathbf{E}_{\perp}^{(1)} = E_y \{0, 1, 0\}; \quad \mathbf{E}_{\perp}^{(2)} = E_y \{\alpha_x, 0, 0\}.$$

Условие (1.32), как нетрудно видеть, означает, что диагонали прямоугольников, в которые вписываются эти эллипсы, относящиеся к разным поляризациям, взаимно ортогональны (рис. 3).

В ряде расчетов может представить интерес вектор поляризации в системе координат  $x_0, y_0, z_0$  (магнитное поле направлено по оси  $z_0$ , вектор  $\mathbf{k}$  лежит в плоскости  $x_0z_0$  и составляет угол  $\theta$  с  $\mathbf{B}_0$ ). В этой системе координат компоненты вектора поляризации определяются по формулам преобразования координат

$$\alpha_x^0 = \alpha_x \cos \theta + \alpha_z \sin \theta; \quad \alpha_y^0 = 1; \quad \alpha_z^0 = \alpha_z \cos \theta - \alpha_x \sin \theta. \quad (1.34)$$

При подстановке значений  $\epsilon_{\alpha\beta}, \eta_{xy}, \eta_{xz}$  из выражений (1.22) и (1.26) получаются следующие выражения для компонент вектора поляризации (при  $\alpha_y = \alpha_y^0 = 1$ ):

$$\alpha_x = \frac{(g\eta + f\xi) \cos \theta + (g\xi + f\epsilon_1) \sin \theta}{N^2 (\epsilon_1 \sin^2 \theta + \eta \cos^2 \theta + \xi \sin 2\theta) - \epsilon_1 \eta + \xi^2}; \quad (1.35)$$

$$\alpha_z = \frac{(g\eta + f\xi) \sin \theta - (g\xi + f\epsilon_1) \cos \theta - N^2 (g \sin \theta - f \cos \theta)}{N^2 (\epsilon_1 \sin^2 \theta + \eta \cos^2 \theta + \xi \sin 2\theta) - \epsilon_1 \eta + \xi^2}; \quad (1.36)$$

$$\alpha_x^0 = \frac{g\eta + f\xi - N^2(g \sin \theta - f \cos \theta) \sin \theta}{N^2(\varepsilon_1 \sin^2 \theta + \eta \cos^2 \theta + \xi \sin 2\theta) - \varepsilon_1 \eta + \xi^2}; \quad (1.37)$$

$$\alpha_z^0 = - \frac{g\xi + f\varepsilon_1 + N^2(g \sin \theta - f \cos \theta) \cos \theta}{N^2(\varepsilon_1 \sin^2 \theta + \eta \cos^2 \theta + \xi \sin 2\theta) - \varepsilon_1 \eta + \xi^2}. \quad (1.38)$$

**Задача.** Показать, что при слабом поглощении мнимая часть частоты  $\omega_2$  при вещественном  $k$  и мнимая часть волнового числа  $k_2$  при вещественном  $\omega$  связаны следующим простым соотношением с проекцией групповой скорости  $d\omega/dk$  на волновой вектор:

$$\omega_2 = k_2 \frac{d\omega}{dk}. \quad (1)$$

**Решение.** Исходим из дисперсионного уравнения

$$k^2 c^2 = \omega^2 \varepsilon(k, \omega). \quad (2)$$

Дифференцируя его по  $k$ , получаем

$$\frac{\partial \omega}{\partial k} \frac{\partial(\omega^2 \varepsilon)}{\omega^2 \partial \omega} = \frac{2kc^2}{\omega^2} - \frac{\partial \varepsilon}{\partial k}. \quad (3)$$

Полагая  $\varepsilon = \varepsilon_1 + i\varepsilon_2$ ,  $k = k_1 + ik_2$ , найдем в линейном относительно  $\varepsilon_2$ ,  $k_2$  приближении (слабое поглощение) при заданном  $\omega$ :

$$\left( \frac{2kc^2}{\omega^2} - \frac{\partial \varepsilon}{\partial k} \right) k_2 = \varepsilon_2. \quad (4)$$

Точно так же при заданном  $k$ , полагая  $\omega = \omega_1 - i\omega_2$ , найдем

$$\frac{\partial(\omega^2 \varepsilon)}{\partial \omega} \omega_2 = \omega^2 \varepsilon_2. \quad (5)$$

Сравнение соотношений (3), (4) и (5) приводит к искомому равенству (1).

## § 2. Плазма без магнитного поля.

### Гидродинамическое приближение

Для выяснения характера колебаний целесообразно использовать гидродинамическое описание плазмы. Сравнение с кинетическим рассмотрением показывает, что гидродинамическое приближение не учитывает ряда важных особенностей колебаний, связанных с их затуханием вследствие теплового движения зарядов. Однако оно сравнительно просто позволяет получить качественную зависимость величин  $\omega$  и  $k$ . При использовании гидродинамического приближения необходимо помнить, что оно совершенно непригодно в области, где фазовая скорость волн настолько мала, что становится сравнимой с тепловой скоростью зарядов (или становится меньше ее), и где колебания затухают (см. § 5, 10 и 11).

Пренебрегая для простоты трением между компонентами плазмы, будем считать колебания адиабатическими. Тогда уравнения, описывающие движение зарядов каждого сорта, будут

$$mn \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + en\mathbf{E}; \quad (2.1)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{p}{n^\gamma} \right) = 0; \quad p = nT; \quad (2.2)$$

$$\frac{dn}{dt} + n \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (2.3)$$

Линеаризуем эти уравнения, полагая  $\mathbf{E}_0 = \mathbf{v}_0 = 0$ ,  $p = p_0 + p^{(1)}$ ,  $n = n_0 + n^{(1)}$  и считая, что величины  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $p^{(1)}$ ,  $n^{(1)}$  изменяются гармонически по закону  $e^{i(kr - \omega t)}$ .

Согласно уравнениям (2.2) и (2.3), давление  $p^{(1)}$  меняется следующим образом:

$$-i\omega p^{(1)} = -\gamma p_0 \operatorname{div} \mathbf{v} = -i\gamma (\mathbf{k}\mathbf{v}) p_0. \quad (2.4)$$

Градиент давления отличен от нуля только в направлении распространения волны, которое мы примем за ось  $z$ , и равно нулю в поперечном направлении. Соответствующие проекции уравнения движения (2.1) имеют вид

$$-i\omega \mathbf{v}_\perp = \frac{e}{m} \mathbf{E}_\perp; \quad (2.5)$$

$$-i\omega v_z = -i\gamma \frac{k^2 T}{m\omega} v_z + \frac{e}{m} E_z. \quad (2.6)$$

Отсюда находим плотность тока  $\mathbf{j} = \sum e n_0 \mathbf{v}$  (суммирование производится по сортам зарядов):

$$\mathbf{j}_\perp = i \sum \frac{e^2 n_0}{m\omega} \mathbf{E}_\perp; \quad j_z = i \sum \frac{e^2 n_0 \omega}{m\omega^2 - \gamma k^2 T} E_z. \quad (2.7)$$

Коэффициенты, стоящие перед  $\mathbf{E}_\perp$  и  $\mathbf{E}_z$ , представляют собой по определению соответственно величины  $\sigma_\perp$  и  $\sigma_\parallel$ . По формуле (1.8), связывающей  $\varepsilon_{\alpha\beta}$  с  $\sigma_{\alpha\beta}$ , находим

$$\varepsilon_\perp = 1 - \sum \frac{4\pi e^2 n_0}{m\omega^2}; \quad (2.8)$$

$$\varepsilon_\parallel = 1 - \sum \frac{4\pi e^2 n_0}{m\omega^2 - \gamma k^2 T}. \quad (2.9)$$

Рассмотрим сначала поперечные колебания. В выражении для  $\varepsilon_\perp$  можно опустить несущественные из-за большой массы ионные слагаемые (что соответствует пренебрежению смещением ионов). Показатель преломления  $N$  определяется, согласно уравнению (1.19), соотношением

$$N^2 = 1 - \frac{\omega_{0e}^2}{\omega^2}, \quad (2.10)$$

где  $\omega_{0e}$  — ленгмюровская частота,

$$\omega_{0e} = \frac{4\pi e^2 n_e}{m_e}. \quad (2.11)$$

Как видно из вывода выражения для  $N^2$ , слагаемое  $-\omega_{0e}^2/\omega^2$  представляет собой отношение тока, создаваемого зарядами в плазме, к току смещения в вакууме. При  $\omega < \omega_{0e}$  показатель

преломления является чисто мнимым:  $p = 0$ ,  $q = \sqrt{\frac{\omega_{0e}^2}{\omega^2} - 1}$ ,

волна экспоненциально убывает по закону  $e^{-\frac{\omega}{c} q z}$ . Невозможность распространения волны объясняется экранировкой электромагнитного поля током зарядов плазмы\*, подобной экранировке поля индукционным током при обычном скин-эффекте. В отличие от обычного скин-эффекта здесь нет, однако, поглощения, и поток энергии в плазму равен нулю.

В области низких частот  $\omega^2 \ll \omega_{0e}^2$  глубина проникновения поля в плазму  $\delta = c/\omega q$  не зависит от частоты  $\omega$  и равна

$$\delta = \frac{c}{\omega_{0e}}. \quad (2.12)$$

Получим этот результат без разложения поля на гармоники. Из уравнений Максвелла следует для поперечных волн ( $\text{div } \mathbf{E} = 0$ ) уравнение

$$\Delta \mathbf{E} = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}. \quad (2.13)$$

Если характерное время изменения поля  $t$  сравнительно велико ( $t \gg 1/\omega_0$ ), то можно пренебречь током смещения. Выражая  $\partial \mathbf{j} / \partial t$  из уравнения движения электронов,

$$m \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} = e^2 n_e \mathbf{E}, \quad (2.14)$$

получим при этом уравнение

$$\Delta \mathbf{E} = \frac{4\pi e^2 n_e}{mc^2} \mathbf{E} \equiv \frac{\mathbf{E}}{\delta^2}. \quad (2.15)$$

Его решение для плоского слоя плазмы имеет вид  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-z/\delta}$ , где  $\delta$ , очевидно, совпадает с выражением (2.12).

При  $\omega > \omega_{0e}$  показатель преломления  $N$  — действительная величина ( $0 < N < 1$ ), и в плазме могут распространяться поперечные волны. В этой же области частот возможны собственные колебания плазмы, частота которых связана с волновым числом соотношением (2.10), где  $N^2 = k^2 c^2 / \omega^2$ :

$$\omega^2 = \omega_{0e}^2 + k^2 c^2. \quad (2.16)$$

Групповая скорость этих волн, определяющая, как известно, скорость переноса энергии, равна

$$v_{гр} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c^2}{v_\phi}, \quad (2.17)$$

где  $v_\phi = \omega/k$  — фазовая скорость волны.

\* Поляризационный ток вносит сдвиг фаз у векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ . Распространение волны возможно, если сдвиг фаз не равен  $\pi/2$ . При  $\omega < \omega_0$  сдвиг фаз оказывается равным  $\pi/2$ .

Влияние трения электронов в плазме на распространение электромагнитных волн грубо можно учесть, добавив в правую часть уравнения движения (2. 5) слагаемое  $-\nu v_{\perp}$ , где  $\nu$  — среднее число столкновений электронов с ионами. Вместо выражения (2. 10) получится формула

$$N^2 = \varepsilon_1 = 1 - \frac{\omega_{0e}^2}{\omega(\omega + i\nu)} = \varepsilon_1 + i\varepsilon_2, \quad (2. 18)$$

где действительная и мнимая части квадрата показателя преломления определяются соотношениями

$$\varepsilon_1 = 1 - \frac{\omega_{0e}^2}{\omega^2 + \nu^2}; \quad \varepsilon_2 = \frac{\nu}{\omega} \frac{\omega_{0e}^2}{\omega^2 + \nu^2}. \quad (2. 19)$$

Действительная и мнимая части показателя преломления  $N = \rho + iq$  выражаются через  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\varepsilon_1 + \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}}; \\ q &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{-\varepsilon_1 + \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (2. 20)$$

Рассмотрим теперь продольные колебания плазмы. Упругой силой, вызывающей продольные колебания, может служить как продольное электрическое поле, вызванное разделением зарядов, так и градиент давления плазмы. Ограничимся случаем, когда имеются ионы только одного сорта с массой  $m_i$  и зарядом  $ze$ . Дисперсионное уравнение для продольных колебаний получается из формул (1. 20) и (2. 9):

$$\varepsilon_{\parallel} = 1 - \frac{4\pi e^2 n_e}{m_e \omega^3 - \gamma_e k^2 T_e} - \frac{4\pi z^2 e^2 n_i}{m_i \omega^2 - \gamma_i k^2 T_i} = 0. \quad (2. 21)$$

Введем обозначения

$$\beta_e^2 = \frac{\gamma_e T_e}{m_e c^2}; \quad \beta_i^2 = \frac{\gamma_i T_i}{m_i c^2}; \quad \omega_{0i}^2 = \frac{4\pi z^2 e^2 n_i}{m_i}. \quad (2. 22)$$

Тогда уравнение (2. 21) для величины  $N = kc/\omega$  может быть записано в виде

$$N^4 - \left\{ \frac{1 - \frac{\omega_{0e}^2}{\omega^2}}{\beta_e^2} + \frac{1 - \frac{\omega_{0i}^2}{\omega^2}}{\beta_i^2} \right\} N^2 + \frac{1 - \frac{\omega_{0e}^2 + \omega_{0i}^2}{\omega^2}}{\beta_e^2 \beta_i^2} = 0. \quad (2. 23)$$

Его решение представлено графически на рис. 4. Как видно из графика, имеется две ветви колебаний, одну из которых условно можно назвать ионной, другую — электронной.

Проанализируем сначала колебания, относящиеся к электронной ветви. В области сравнительно высоких частот ( $\omega^2 \gg \frac{\gamma_i k^2 T_i}{m_i}$ ,

$\frac{\gamma_e k^2 T_e^2}{m_e}$ ) третьим слагаемым в выражении (2. 21) для  $\varepsilon_{\parallel}$ , учитывающим колебания ионов, можно пренебречь. При этом получим

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \gamma_e \frac{k^2 T_e}{m_e}, \quad (2. 24)$$

или для показателя преломления

$$N^2 = \frac{1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}}{\beta_e^2}. \quad (2. 25)$$

Рассмотрим собственные колебания плазмы, описываемые формулой (2. 24). Первое слагаемое в выражении для  $\omega^2$  связано с упругой силой, вызванной разделением зарядов, второе обусловлено гидродинамическим давлением электронного газа.

Аналогичные соотношения, как будет показано в § 10, получаются и из кинетического рассмотрения. Коэффициент  $\gamma_e$  при кинетическом рассмотрении без учета столкновений равен 3, что соответствует показателю адибаты для случая одномерного движения (одна степень свободы). В гидродинамическом приближении

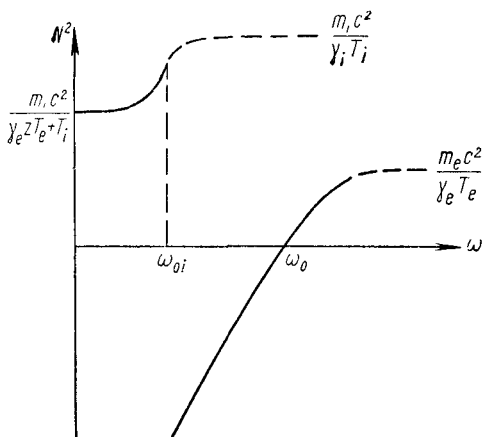


Рис. 4.

предполагается, что во время движения энергия колебаний успевает распределяться между всеми тремя степенями свободы, поэтому показатель адибаты  $\gamma_e = 5/3$  не совпадает с кинетическим значением  $\gamma_e$ . В реальных случаях частота столкновений, приводящих к перераспределению энергии колебаний, всегда меньше частоты колебаний. Поэтому правильным значением является  $\gamma_e = 3^*$ .

Уравнение (2. 24) показывает, что частота продольных колебаний всегда близка к ленгмюровской частоте. Увеличение частоты примерно в 1,5 раза происходит в области очень коротких длин волн ( $k^2 \geq 4\pi e^2 n_e / T_e$ ), сравнимых с дебаевской длиной. В этой области фазовая скорость волн становится порядка тепло-

\* Отметим, что при последовательном гидродинамическом подходе в уравнении движения необходимо удерживать силу трения  $R = -0,7 n_e \nabla T_e$ . При этом эффективное значение  $\gamma_e$  оказывается ближе к кинетическому:  $\gamma_e \text{эф} = \gamma_e + 0,7 (\gamma_e - 1) = 2,13$ .



вой скорости электронов и, как будет показано при кинетическом рассмотрении, при этом наблюдается сильное затухание. На рис. 4 соответствующая часть электронной ветви изображена пунктиром. Дисперсионное уравнение в форме (2. 25) удобно для выяснения вопроса о распространении волн с заданной частотой. На основании сказанного выше относительно собственных колебаний ясно, что продольные волны могут распространяться при  $\omega \geq \omega_0$ , но опять-таки в очень узкой области частот. При  $\omega < \omega_0$  квадрат показателя преломления отрицательный:  $N^2 = -q^2 < 0$ , и приложенное к плазме поле экспоненциально затухает по закону  $e^{-z/\delta}$ . Глубина проникновения  $\delta = c/\omega q$  оказывается равной

$$\delta^2 = \frac{c^2 \beta_e^2}{\omega_{0e}^2} = \frac{\gamma_e T_e}{4\pi e^2 n_e}; \quad \omega_{0e}^2 \gg \omega^2 \gg \gamma \frac{k^2 T}{m_i}; \quad (2. 26)$$

$$\delta^2 = \frac{c^2 \beta_e^2}{\omega_{0e}^2} + \frac{c^2 \beta_i^2}{\omega_{0i}^2} = \frac{\gamma_i T_i + \gamma_e z T_e}{4\pi z^2 e^2 n_{oi}}; \quad \omega^2 \ll \gamma \frac{k^2 T}{m_i}, \quad (2. 27)$$

т. е. совпадает с выражением для дебаевской длины. Вторая формула получается из уравнения (2. 21) путем вычеркивания членов  $m_e \omega^2$  и  $m_i \omega^2$ . Это соответствует пренебрежению инерционными членами в уравнениях движения, так что полученное выражение (2. 27) для глубины проникновения есть результат гидростатического равновесия электронов и ионов в электрическом поле.

Обратимся теперь к колебаниям, относящимся к ионной ветви. Эта ветвь получается из уравнения (2. 21) в результате опускания члена  $m_e \omega^2$ , что соответствует пренебрежению инерцией электронов. При этом уравнение движения электронов приобретает вид условия уравнивания градиента электронного давления возникающим при колебаниях электростатическим полем  $E$ :

$$en_e E = -\nabla p_e. \quad (2. 28)$$

Разрешая дисперсионное уравнение (2. 21) относительно  $\omega^2$  и учитывая, что  $zn_i = n_e$ , находим

$$\omega^2 = \gamma_i \frac{k^2 T_i}{m_i} + \gamma_e \frac{k^2 z T_e}{\left(1 + \frac{\gamma_e k^2 T_e}{4\pi e^2 n_e}\right) m_i}. \quad (2. 29)$$

Для длин волн, больших дебаевской длины,

$$\frac{\gamma_e k^2 T_e}{4\pi e^2 n_e} \ll 1, \quad (2. 30)$$

уравнение (2. 29) дает уравнение звуковых колебаний

$$\omega^2 = k^2 \frac{\gamma_i T_i + \gamma_e z T_e}{m_i}. \quad (2. 31)$$

Условие (2. 30) соответствует пренебрежению единицей в выражении (2. 21) для  $\epsilon_{\parallel}$ , т. е. пренебрежению объемным зарядом

(см. стр. 6). В случае, противоположном условию (2. 30), возникает объемный заряд и получается дисперсионное соотношение, аналогичное электронному (2. 24):

$$\omega^2 = \omega_{0i}^2 + k^2 \frac{\gamma_i T_i}{m_i}. \quad (2. 32)$$

Если частота столкновений зарядов мала по сравнению с частотой колебаний, то формулы (2. 31) и (2. 32) справедливы только при условии  $\omega^2 \gg \gamma_i k^2 T_i / m_i$ ; в противном случае, как уже отмечалось, происходит сильное затухание. Последнее условие в обоих случаях выполняется только тогда, когда электронное давление значительно выше ионного, т. е.

$$zT_e \gg T_i. \quad (2. 33)$$

При этом условии можно пренебречь градиентом ионного давления в уравнении движения ионов. Ионы, таким образом, находятся под действием силы  $zen_i E$ , равной, как это следует из уравнения (2. 28) для электронов (и из условия нейтральности плазмы в стационарном состоянии  $zn_i = n_e$ ), градиенту электронного давления. В случае длинноволновых возмущений, когда заряд нейтрализуется, электроны движутся вместе с ионами ( $v_e = v_i$ ). Поэтому отсюда сразу получается «ионный звук с электронной температурой» [см. формулу (2. 31) с  $T_i = 0$ ]. В предельном случае коротких длин волн ( $k \rightarrow \infty$ ) скорость электронов в волне, равная, согласно уравнению (2. 6),  $v_{ze} = -i \frac{e\omega}{\gamma_e k^2 T_e} E$ , оказывается пренебрежимо малой по сравнению со скоростью ионов  $v_{zi} = i \frac{e}{m_i \omega} E$ . Движение ионов под действием электрического поля при покоящихся электронах представляет собой колебания с ленгмюровской частотой [формула (2. 32)].

### § 3. Плазма в магнитном поле. Гидродинамическое приближение

Магнитное поле существенно усложняет характер колебаний плазмы. Поэтому целесообразно рассмотреть сначала предельный случай холодной плазмы, полагая электронное и ионное давление равным нулю. Как вытекает из предыдущего раздела, в отсутствие магнитного поля и в пренебрежении давлением электронов и ионов в плазме возможны только высокочастотные электронные колебания. Причина этого в том, что заряды колеблются в противофазе с электрическим полем, создавая ток, противоположный по знаку току смещения. При частотах, меньших ленгмюровской частоты электронов, ток, создаваемый зарядами, по абсолютной величине больше тока смещения, и колебания, следовательно, невозможны (см. стр. 13--14).

При наличии в плазме магнитного поля  $\mathbf{B}_0$  частица под действием поля волны и постоянного магнитного поля будет совершать

сложное движение. Ток зарядов в общем случае не компенсирует тока смещения. Так, например, при частотах колебаний, малых по сравнению с циклотронной частотой, заряд, как известно, будет двигаться в направлении, перпендикулярном к электрическому полю, со скоростью  $\mathbf{v} = c [\mathbf{E}\mathbf{B}_0]/B_0^2$ .

В результате всего этого оказывается, что в плазме возможны колебания и с низкими частотами вплоть до  $\omega = 0$ .

Запишем уравнение движения заряда в поле монохроматической волны:

$$-i\omega\mathbf{v} = \frac{e}{m} \mathbf{E} + [\mathbf{v}\boldsymbol{\omega}_B]; \quad \omega_B = \frac{eB_0}{mc} \quad (3.1)$$

(для ионов  $\omega_B = \omega_{Bi} > 0$ ; для электронов  $\omega_B = -\omega_{Be}$ ,  $\omega_{Be} > 0$ ). Умножая это уравнение векторно и скалярно на  $\boldsymbol{\omega}_B$ , получим

$$-i\omega [\mathbf{v}\boldsymbol{\omega}_B] + \mathbf{v}\boldsymbol{\omega}_B^2 - \omega_B(\mathbf{v}\boldsymbol{\omega}_B) = \frac{e}{m} [\mathbf{E}\boldsymbol{\omega}_B]; \quad (3.2)$$

$$-i\omega(\mathbf{v}\boldsymbol{\omega}_B) = \frac{e}{m} (\mathbf{E}\boldsymbol{\omega}_B). \quad (3.3)$$

Исключая из уравнений (3.1) — (3.3)  $[\mathbf{v}\boldsymbol{\omega}_B]$  и  $(\mathbf{v}\boldsymbol{\omega}_B)$ , найдем

$$\mathbf{v} = i \frac{e\omega}{m(\omega^2 - \omega_B^2)} \left\{ \mathbf{E} - \frac{\omega_B(\mathbf{E}\boldsymbol{\omega}_B)}{\omega^2} \right\} - \frac{e}{m} \frac{[\mathbf{E}\boldsymbol{\omega}_B]}{\omega^2 - \omega_B^2}. \quad (3.4)$$

Подставим теперь  $\mathbf{v}$  в выражение для вектора электрической индукции  $\mathbf{D} = \mathbf{E} + i \frac{4\pi}{\omega} \mathbf{j} = \mathbf{E} + i \frac{4\pi}{\omega} \sum en\mathbf{v}$ :

$$\mathbf{D} = \left( 1 - \sum \frac{\omega_0^2}{\omega^2 - \omega_B^2} \right) \mathbf{E} + \sum \frac{\omega_0^2}{\omega^2 - \omega_B^2} \frac{\omega_B(\mathbf{E}\boldsymbol{\omega}_B)}{\omega^2} - i \sum \frac{\omega_0^2}{\omega^2 - \omega_B^2} \frac{[\mathbf{E}\boldsymbol{\omega}_B]}{\omega}. \quad (3.5)$$

Отсюда нетрудно написать выражение для тензора электрической проницаемости плазмы. В системе координат с осью  $z_0$ , направленной вдоль магнитного поля, этот тензор имеет вид

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^0 = \begin{pmatrix} \varepsilon & ig & 0 \\ -ig & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \eta \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

где

$$\varepsilon = 1 - \sum \frac{\omega_0^2}{\omega^2 - \omega_B^2}; \quad g = - \sum \frac{\omega_B \omega_0^2}{\omega(\omega^2 - \omega_B^2)}; \\ \eta = 1 - \sum \frac{\omega_0^2}{\omega^2}. \quad (3.6a)$$

Пусть в плазме имеются ионы только одного сорта с массой  $m_i$  и зарядом  $ze$ . Введем обозначения \*

$$M = \frac{m_i}{zm_e}; \quad x = \frac{\omega}{\omega_{Bi}}; \quad A^2 = \frac{\omega_{0i}^2}{\omega_{Bi}^2} + \frac{\omega_{0e}^2}{\omega_{Be}^2} = \frac{4\pi(m_i + zm_e)n_i c^2}{B_0^2}. \quad (3.7)$$

Тогда выражения для  $\varepsilon$ ,  $g$  и  $\eta$  будут

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon &= 1 - A^2 \frac{M(x^2 - M)}{(x^2 - 1)(x^2 - M^2)}; \\ g &= A^2 \frac{M(M - 1)x}{(x^2 - 1)(x^2 - M^2)}; \\ \eta &= 1 - A^2 \frac{M}{x^2}. \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

Квадрат показателя преломления определяется с помощью выражений (1.25) и (1.24а) с учетом того, что  $\xi = f = 0$ :

$$N^2 = \frac{(\varepsilon^2 - g^2 - \varepsilon\eta) \sin^2 \theta + 2\varepsilon\eta \pm \sqrt{(\varepsilon^2 - g^2 - \varepsilon\eta)^2 \sin^4 \theta + 4\eta^2 g^2 \cos^2 \theta}}{2(\varepsilon \sin^2 \theta + \eta \cos^2 \theta)}. \quad (3.9)$$

При подстановке в эту формулу значений (3.8) получается следующее выражение:

$$\left. \begin{aligned} N^2 &= \frac{P}{Q}; \\ P &= \{M^3 A^4 - M A^2 [(M^2 - M + 1)x^2 - M^2]\} \sin^2 \theta + \\ &+ 2(x^2 - M A^2) [(x^2 - 1)(x^2 - M^2) - M A^2 (x^2 - M)] \pm \\ &\pm \sqrt{\{M^3 A^4 - M A^2 [(M^2 - M + 1)x^2 - M^2]\}^2 \sin^4 \theta + \dots} \\ &\dots + 4(x^2 - M A^2)^2 A^4 M^2 (M - 1)^2 x^2 \cos^2 \theta; \\ Q &= 2[x^2(x^2 - 1)(x^2 - M^2) - M A^2 x^2(x^2 - M)] \sin^2 \theta - \\ &- M A^2 (x^2 - 1)(x^2 - M^2) \cos^2 \theta]. \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

Для получения графической зависимости  $N^2(\omega)$  найдем значения  $x$ , при которых  $N^2$  обращается в нуль и в бесконечность.

Из формулы (3.9) нетрудно заметить, что  $N^2$  обращается в нуль независимо от угла  $\theta$  при условиях

$$1) \eta = 0; \quad 2) \varepsilon^2 - g^2 = 0. \quad (3.11)$$

Первое условие дает значение  $x = x_1^0$ , где

$$x_1^0 = A \sqrt{M} \quad \text{или} \quad \omega_1^0 = \sqrt{\omega_{0e}^2 + \omega_{0i}^2} \equiv \omega_0. \quad (3.12)$$

\* Параметр  $A$  представляет собой отношение скорости света к альфвеновской скорости. Для дейтериевой плазмы он равен  $A = 0,2\sqrt{n_i/B_0}$ .

Второе условие приводит к квадратному уравнению относительно  $x = x_{2,3}^0$ . Опуская промежуточные выкладки, приведем решение:

$$\left. \begin{aligned} x_{2,3}^0 &= \sqrt{MA^2 + \frac{(M+1)^2}{4} \pm \frac{M-1}{2}}; \\ \omega_{2,3}^0 &= \sqrt{\omega_{0e}^2 + \omega_{0i}^2 + \frac{(\omega_{Be} + \omega_{Bi})^2}{4} \pm \frac{\omega_{Be} - \omega_{Bi}}{2}}. \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

В реальных случаях обычно параметр  $A$  превосходит значение  $1/\sqrt{M}$ . При этом условии

$$x_2^0 < x_1^0 < x_3^0. \quad (3.14)$$

Условия (3.11) нетрудно получить из следующих соображений. При  $N^2 = 0$  отсутствует зависимость полей от координат («бесконечно длинные» волны), следовательно, вектор электрической индукции равен нулю ( $\mathbf{D} = 0$ ) [см. уравнения (1.14a)]. Нетривиальное решение для  $\mathbf{E}$  получается отсюда при условии  $\text{Det } \varepsilon_{\alpha\beta} = 0$ . Так как детерминант является инвариантом, то для его вычисления можно воспользоваться тензором  $\varepsilon_{\alpha\beta}^0$  (3.6):

$$\text{Det } \varepsilon_{\alpha\beta} = (\varepsilon^2 - g^2) \eta. \quad (3.15)$$

Условие обращения этого детерминанта в нуль приводит к соотношениям (3.11). При этом, очевидно, условие  $\eta = 0$  есть следствие компенсации продольных (по отношению к  $\mathbf{B}_0$ ) компонент тока смещения и поляризации, а условие  $\varepsilon^2 - g^2 = 0$  — следствие компенсации поперечных компонент. Проекция электрического поля на направление  $\mathbf{B}_0$  при этом является независимой величиной, проекции же на плоскость, перпендикулярную к  $\mathbf{B}_0$ , связаны соотношениями

$$E_{x_0} = -i \frac{g}{\varepsilon} E_{y_0}; \quad E_{y_0} = i \frac{g}{\varepsilon} E_{x_0}.$$

Заметим еще, что значения частот  $\omega^0$ , при которых показатель преломления обращается в нуль, остаются неизменными и при учете теплового движения зарядов, так как смещения зарядов вследствие теплового движения несущественны при бесконечной длине волны. Формально это вытекает из того, что параметром, характеризующим учет теплового движения, является отношение тепловой скорости зарядов к фазовой скорости волны  $v_T/v_\phi$ . При  $N = 0$ , очевидно,  $v_\phi = \infty$ , и этот параметр равен нулю.

Найдем теперь точки, в которых  $N^2 = \infty$ . В бесконечность  $N^2$  обращается при трех значениях  $x = x_{1,2,3}^\infty$ , определяемых условием  $Q = 0$ . Для продольного распространения ( $\theta = 0$ ), как это видно из выражения (3.10) для  $Q$ , эти значения таковы:  $x_1^\infty = 1$ ,

$x_2^\infty$  равняется меньшему из чисел  $M$  и  $AM^{1/2}$ , а  $x_3^\infty$  — большему из этих чисел. Соответствующие частоты

$$\left. \begin{aligned} \omega_1^\infty &= \omega_{Bi}; \\ \omega_2^\infty &= \min \{ \omega_{Be}, \omega_0 \}; \\ \omega_3^\infty &= \max \{ \omega_{Be}, \omega_0 \}. \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

Для определения зависимости  $\omega_{1,2,3}^\infty(\theta)$  перепишем условие  $Q = 0$  в виде

$$x^6 - \alpha x^4 + \beta x^2 - \gamma = 0, \quad (3.17)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= M^2 + 1 + MA^2; \\ \beta &= M^2(1 + A^2) + M(M^2 - M + 1)A^2 \cos^2 \theta; \\ \gamma &= M^3 A^2 \cos^2 \theta. \end{aligned} \right\} \quad (3.18)$$

Будем предполагать, что  $A \geq 1$ . Тогда, используя тот факт, что  $M \gg 1$ , уравнение (3.17) можно заменить приближенно уравнением  $(x^4 - \alpha x^2 + \beta)(x^2 - \gamma/\beta)$ , корни которого (положительные) равны

$$x_1^\infty = \sqrt{\frac{\gamma}{\beta}} \approx \frac{\cos \theta}{\sqrt{\cos^2 \theta + \frac{(1+A^2)\sin^2 \theta}{MA^2}}}; \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} x_{2,3}^\infty &= \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{\alpha + 2\sqrt{\beta}} \pm \sqrt{\alpha - 2\sqrt{\beta}} \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{M^2 + MA^2 + 2[M^2 + M^2 A^2 + M^3 A^2 \cos^2 \theta]^{1/2}} \pm \right. \\ &\quad \left. \pm \sqrt{M^2 + MA^2 - 2[M^2 + M^2 A^2 + M^3 A^2 \cos^2 \theta]^{1/2}} \right\}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Для всех углов  $\theta$  вне узкого конуса

$$\left| \frac{\pi}{2} - \theta \right| < \frac{1}{\sqrt{M}} \quad (3.21)$$

приближенные значения (с точностью до величин порядка  $1/M$ ) частот  $\omega^\infty$  равны:

$$\left. \begin{aligned} \omega_1^\infty &= \omega_{Bi}; \\ \omega_{2,3}^\infty &= \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{\omega_{0e}^2 + \omega_{Be}^2 + 2\omega_{0e}\omega_{Be} \cos \theta} \pm \right. \\ &\quad \left. \pm \sqrt{\omega_{0e}^2 + \omega_{Be}^2 - 2\omega_{0e}\omega_{Be} \cos \theta} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (3.22)$$

Укажем следующую мнемоническую формулу для этих значений корней  $\omega_{2,3}^\infty$ . Пусть  $\omega_{Be}$  — вектор, направленный вдоль  $B_0$ , а  $\omega_{0e}$  — вектор, направленный вдоль  $k$ . Тогда

$$\omega_{2,3}^\infty = \frac{1}{2} \left\{ |\omega_{0e} + \omega_{Be}| \pm |\omega_{0e} - \omega_{Be}| \right\}. \quad (3.23)$$

При  $\theta = \frac{\pi}{2}$  для корня  $\omega_3^\infty$  из выражения (3. 23) получаем

$$\omega_3^\infty = \sqrt{\omega_{0e}^2 + \omega_{Be}^2}. \quad (3. 24)$$

Значения же корней  $\omega_1^\infty$  и  $\omega_2^\infty$  при  $\theta = \frac{\pi}{2}$  по формулам (3. 22) и (3. 23) определить нельзя. Из выражения (3. 19) видно, что вблизи  $\theta = \frac{\pi}{2}$  значение  $\omega_1^\infty$  падает от  $\omega_{Bi}$  до нуля. Формула (3. 20) в отличие от выражения (3. 23) дает для  $\omega_2^\infty$  конечное значение, которое нетрудно получить, разлагая подкоренные выражения в формуле (3. 20) по внутреннему радикалу (для углов, не очень близких к  $\pi/2$ , этого сделать нельзя ввиду того, что член  $M^3 A^2 \cos^2 \theta$  может быть большим). Соответствующее предельное значение  $\omega_2^\infty$  равно:

$$x_2^\infty = \left( M \frac{1 + A^2}{M + A^2} \right)^{1/2};$$

$$\omega_2^\infty = \left( \omega_{Bi} \omega_{Be} \frac{\omega_{Bi}^2 + \omega_{0i}^2}{\omega_{Bi} \omega_{Be} + \omega_{0i}^2} \right)^{1/2}. \quad (3. 25)$$

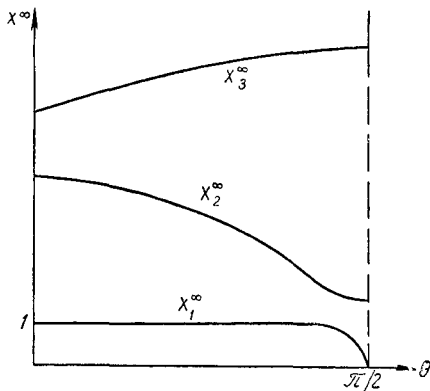


Рис. 5.

На рис. 5 схематически изображена зависимость  $x^\infty$  от угла  $\theta$ . Зная нули и полюса функции  $N^2(x)$ , нетрудно построить ее графически. Эта функция двузначная. Из формулы (3. 9) видно, что оба ее значения совпадают только при обращении радикала в нуль. Это может быть в следующих трех случаях:

$$1) \theta = 0, g = 0; \quad 2) \theta = 0, \eta = 0;$$

$$3) \theta = \frac{\pi}{2}, \varepsilon^2 - g^2 - \varepsilon\eta = 0. \quad (3. 26)$$

Таким образом, кривые  $N^2(x)$  не пересекаются при косом пространстве волн ( $\theta \neq 0, \theta \neq \frac{\pi}{2}$ ) и лишь в предельных случаях ( $\theta = 0$  и  $\theta = \frac{\pi}{2}$ ) имеют точки касания. При  $\theta = 0$  кривые имеют точки касания при  $\omega = 0$  и на ленгмюровской частоте  $\omega = \omega_0$ . При  $\theta = \frac{\pi}{2}$  с точностью до  $1/M$  значение частоты  $\omega$ , при которой происходит касание, определяется соотношением  $x^2 = 1 + A^2$ , т. е.

$$\omega = \sqrt{\omega_{0i}^2 + \omega_{Bi}^2}. \quad (3. 27)$$

Нетрудно видеть, что это значение  $\omega$  всегда больше значения  $\omega_2^\infty$  (при  $\theta = \frac{\pi}{2}$ ), определяемого формулой (3. 25).

Отметим теперь некоторые частные значения  $N^2$ .

При  $\omega \rightarrow 0$  квадрат показателя преломления стремится к значениям

$$N_1^2 = \frac{1 + A^2}{\cos^2 \theta}; \quad N_2^2 = 1 + A^2, \quad (3. 28)$$

которые соответствуют следующим законам дисперсии:

$$\omega_1^2 = k^2 \frac{c^2 c_A^2}{c^2 + c_A^2} \cos^2 \theta; \quad \omega_2^2 = k^2 \frac{c^2 c_A^2}{c^2 + c_A^2}. \quad (3. 29)$$

При  $c \gg c_A$  отсюда получаются хорошо известные соотношения для гидромагнитных волн (в холодной плазме):

$$\omega_1^2 = k^2 c_A^2 \cos^2 \theta; \quad \omega_2^2 = k^2 c^2. \quad (3. 29a)$$

Первое соотношение определяет альфвеновскую волну. Оно не меняется и при учете давления плазмы. Второе соотношение определяет одну из магнитозвуковых волн (а именно «быструю волну») при условии, что альфвеновская скорость значительно больше звуковой:  $c_A \gg c_s$ .

Заметим, что при  $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$  показатель преломления  $N_1^2 \rightarrow \infty$ . Это соответствует нулевой частоте колебаний  $\omega_1 = 0$  при любой длине волны. Имеющееся здесь вырождение снимается в случае неоднородного магнитного поля, причем собственные частоты могут оказаться мнимыми, что соответствует неустойчивости исходного состояния.

При  $\omega \rightarrow \infty$  оба значения  $N^2$  стремятся к единице, так как при частотах, значительно превышающих характерные собственные частоты среды, поляризация не существенна. Плазма перестает влиять на распространение электромагнитных волн. Для обеих поляризаций при этом

$$N_1 = N_2 = 1, \quad \omega_1 = \omega_2 = kc. \quad (3. 30)$$

На ленгмюровской частоте, как отмечалось выше, один из показателей преломления обращается в нуль. Другой при этом, как следует из формулы (3. 9), определяется выражением  $N^2 = \frac{\varepsilon^2 - g^2}{\varepsilon}$ . Подставляя сюда  $\omega = \omega_{0e}$ , можно найти значение  $N^2$ .

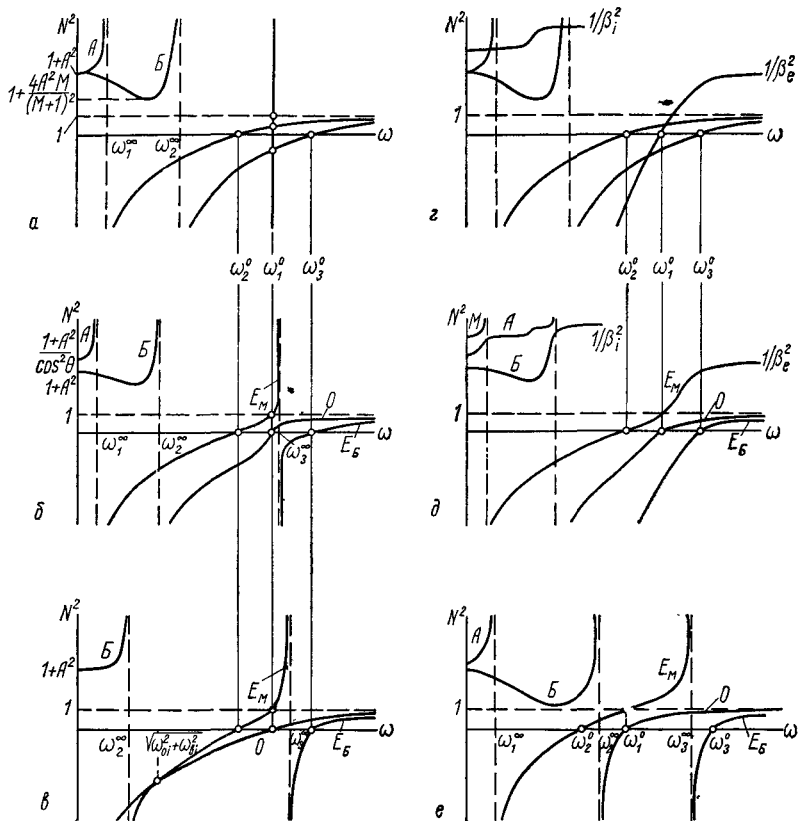
С точностью до  $1/M$  оно оказывается равным 1.

Приведенных данных достаточно для представления хода дисперсионных кривых. На рис. 6 показано, как эти кривые деформируются при изменении угла  $\theta$  от 0 до  $\frac{\pi}{2}$ .

Значения  $N^2$  в нижней полуплоскости определяют глубину экранирования электромагнитного поля данной частоты в плазме.



Собственные колебания плазмы описываются кривыми, расположенными в верхней полуплоскости, где  $N^2 = \frac{k^2 c^2}{\omega^2} > 0$  и, следовательно,  $k$  — вещественное число. Рассматривая зависимость



Схематическая зависимость квадрата показателя преломления от частоты:

- а)  $\omega_0 > \omega_{Be}$ ;  $p = 0$ ;  $\theta = 0$ ;
- б)  $\omega_0 > \omega_{Be}$ ;  $p = 0$ ;  $\theta \neq 0, \pi/2$ ;
- в)  $\omega_0 > \omega_{Be}$ ;  $p = 0$ ;  $\theta = \pi/2$ ;

- г)  $\omega_0 > \omega_{Be}$ ;  $p \neq 0$ ;  $\theta = 0$ ;
- д)  $\omega_0 > \omega_{Be}$ ;  $p \neq 0$ ;  $\theta \neq 0, \pi/2$ ;
- е)  $\omega_0 < \omega_{Be}$ ;  $p = 0$ ;  $\theta \neq 0, \pi/2$ ;

Рис. 6.

$\omega(k)$ , т. е. учитывая только кривые в верхней полуплоскости, мы видим, что в холодной плазме имеется пять ветвей колебаний.

При  $\theta \neq 0$  ветви колебаний отделены одна от другой. При  $\theta \rightarrow 0$  три ветви сближаются вблизи плазменной частоты  $\omega = \omega_0$ . Ветвь продольных электронных колебаний  $\omega = \omega_0$  при  $\theta = 0$

можно рассматривать как состоящую из частей трех различных ветвей (аналогично при  $\theta = \frac{\pi}{2}$  ветвь  $N^2 = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}$  получается при стремлении  $\theta$  к  $\frac{\pi}{2}$  путем слияния двух ветвей).

Для классификации ветвей колебаний необходимо рассмотреть еще колебания плазмы в магнитном поле с учетом газокINETического давления. При учете давления общее число ветвей функции  $\omega(k)$ , как показано С. И. Брагинским [9], равно шести. Исследование дисперсионного уравнения в этом случае очень сложно. Поэтому мы его проделывать не будем, а постараемся представить общую картину, рассмотрев предельные случаи.

Уравнение движения заряда в магнитном поле при учете давления имеет вид

$$-i\dot{\omega}\mathbf{v} = e\mathbf{E} - \frac{1}{mn} \nabla p^{(1)} + [\mathbf{v}\boldsymbol{\omega}_B], \quad (3.31)$$

где

$$p^{(1)} = \frac{\gamma p_0}{i\omega} \operatorname{div} \mathbf{v} = \gamma p_0 \frac{(k\mathbf{v})}{\omega}. \quad (3.32)$$

Рассмотрим продольное распространение  $k \parallel \mathbf{B}_0$ . В  $z$ -компоненту уравнения, очевидно, не входит член  $[\mathbf{v}\mathbf{B}_0]$ , а в  $x$ - и  $y$ -компоненты не входит член с давлением, так как по условию  $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0$ . Отсюда видно, что поперечные и продольные колебания совершенно отделены, причем показатель преломления поперечных волн не зависит от давления плазмы, а показатель преломления продольных волн — от магнитного поля. Общая картина при  $\theta = 0$  получается путем наложения кривых, описывающих продольные колебания при  $B_0 = 0$ , на кривые, описывающие поперечные колебания при  $p = 0$ . Для продольных электронных колебаний мы имеем теперь вместо вертикальной линии  $\omega = \omega_0$  наклонную линию с насыщением при  $\omega \gg \omega_0$ . Из сравнения со случаем  $p = 0$  можно заключить, что при переходе от  $\theta = 0$  к косым направлениям кривые вблизи ленгмюровской частоты будут деформироваться так, как показано на рис. 7. Точки, где  $N^2 = 0$ , как уже отмечалось, и при учете давления не изменяются.

Рассмотрим теперь область низких частот, где существенны ионные колебания. Низкочастотные длинноволновые колебания ( $\omega \rightarrow 0$ ,  $k \rightarrow 0$ ) образуют, как это известно из магнитной гидродинамики, три ветви: альфвеновскую (предполагаем  $c_A \ll c$ )

$$\omega = kc_A \cos \theta, \quad N^2 = \frac{c^2}{c_A^2 \cos^2 \theta} \quad (3.33)$$

и две магнитозвуковых («быструю» и «медленную»):

$$\omega = \frac{k}{2} \left\{ \sqrt{c_A^2 + c_s^2 + 2c_A c_s \cos \theta} \pm \sqrt{c_A^2 + c_s^2 - 2c_A c_s \cos \theta} \right\} \quad (3.34)$$

или, по аналогии с выражением (3.23а),

$$\omega = \frac{1}{2} \{ |c_A + c_s| \pm |c_A - c_s| \}. \quad (3.34а)$$

В случае  $c_A \gg c_s$  для быстрой волны имеем

$$\omega = kc_A; \quad N^2 = \frac{c^2}{c_A^2}, \quad (3.35)$$

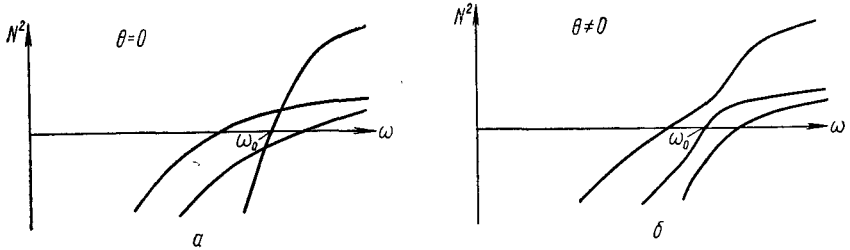


Рис. 7.

а для медленной

$$\omega = kc_s \cos \theta; \quad N^2 = \frac{c^2}{c_s^2 \cos^2 \theta}. \quad (3.35а)$$

При  $\theta = 0$  медленная магнитозвуковая волна переходит в звуковую. При  $\theta \neq 0$  групповая скорость этой волны направлена, как и групповая скорость альфвеновской волны, вдоль магнитного поля.

Чтобы составить представление о дальнейшем ходе этих трех ветвей при учете давления плазмы, рассмотрим предельный случай коротких длин волн  $k \rightarrow \infty$ . Пусть вектор  $\mathbf{k}$  направлен по оси  $z$ . Из  $z$ -компоненты уравнения движения, сравнивая два последних члена, находим оценку для  $p^{(1)}$ :

$$p^{(1)} = \gamma p_0 \frac{kv_z}{\omega} \sim \frac{mnv_x \omega_B}{k}. \quad (3.36)$$

Таким образом, при  $k \rightarrow \infty$   $p^{(1)}$  становится исчезающе малым. Далее оценим  $v_z$ , при  $\omega \sim \omega_B$

$$v_z \sim v_x \frac{mn\omega_B^2}{\gamma p_0 k^2} \sim v_x \frac{\omega_B^2}{k^2 v_T^2}; \quad v_T \sim \sqrt{\frac{p_0}{mn}}. \quad (3.37)$$

Как видно, при условии  $kv_T \gg \omega_B$  продольная скорость пренебрежимо мала по сравнению с поперечной. Заряды движутся

в плоскости, перпендикулярной к вектору  $\mathbf{k}$ . Но при этом  $x$ - и  $y$ -компоненты уравнения движения имеют такой же вид, как и для продольного распространения, с той разницей, что на движение зарядов теперь влияет не полное магнитное поле, а лишь его проекция на вектор  $\mathbf{k}$ , равная  $B_0 \cos \theta$ . Поэтому показатель преломления получается таким же, как для поперечных волн при продольном распространении, только вместо  $\omega_B$  будет входить  $\omega_B \cos \theta$ .

Таким образом, показатель преломления обратится в бесконечность при  $\omega = \omega_{B1} \cos \theta$  и  $\omega = \omega_{Be} \cos \theta$  [9]. Следует отметить, что в действительности при условии  $kv_T \gg \omega_B$  волны должны сильно затухать, как это следует из кинетического рассмотрения. Поэтому исследование области коротковолновых возмущений в гидродинамическом приближении полезно, главным образом, для полной классификации ветвей колебаний. При переходе к косым направлениям  $\theta \neq 0$  кривые в месте пересечения расщепляются, как и в случае отсутствия давления плазмы. С учетом всех этих замечаний нетрудно представить общий вид дисперсионных кривых (см. рис. 6, *д*).

В методических целях полезно произвести классификацию ветвей колебаний. Наиболее постоянными свойствами обладают длинноволновые части ветвей. Длинноволновые колебания слабо затухают, тогда как о коротковолновых участках ветвей из-за затухания колебаний вообще можно говорить только условно. Далее, как мы видели, точки, где  $N^2 = 0$ , являются своего рода инвариантами: они не зависят ни от угла  $\theta$ , ни от давления плазмы. Поэтому классификацию ветвей колебаний целесообразно произвести, основываясь на свойствах длинноволновых колебаний. Три ветви колебаний, описывающие при  $k \rightarrow 0$  магнитогидродинамические волны, будем называть соответственно альфвеновской ветвью (*A*), ветвью быстрых (*B*) и медленных (*M*) колебаний. Ветвь, проходящую при  $k = 0$  через ленгмюровскую частоту, назовем обыкновенными (*O*) колебаниями или обыкновенной волной. Две другие электронные ветви назовем необыкновенными волнами, ту, у которой при  $N^2 > 0$  фазовая скорость больше скорости света ( $N < 1$ ), назовем быстрой волной  $E_B$ , другую, имеющую резонанс на частоте, близкой к  $\omega_0$  или  $\omega_{Be}$  (в зависимости от того, какая из этих частот больше), — медленной необыкновенной волной  $E_M^*$ .

Рассмотрим более подробно случаи чисто продольного и поперечного распространения в холодной плазме.

При продольном распространении  $\theta = 0$ ,  $\eta_{xx} = \eta_{yy} = \varepsilon$ ;  $\eta_{xy} = ig$ ,  $N^2 = \varepsilon \pm g$ . Согласно уравнению (1.31),  $\alpha_x = \pm 1$ , т. е. обе волны — обыкновенная и необыкновенная — поляризо-

\* Заметим, что при  $\omega_0 \gg \omega_{Be}$  ветви *A*, *B*, *M* отделены большим частотным интервалом от ветвей *O*,  $E_B$ ,  $E_M$ . В этом случае их можно назвать, соответственно, низкочастотными и высокочастотными ветвями [9].

ваны по кругу. Для выяснения направления вращения электрического вектора выпишем систему уравнений для  $E$ :

$$\left. \begin{aligned} (N^2 - \varepsilon) E_x - igE_y &= 0; \\ igE_x + (N^2 - \varepsilon) E_y &= 0; \\ -\eta E_z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.38)$$

Для волны, в которой  $E_x = -iE_y$  (левое вращение, в направлении вращения электрона в магнитном поле, рис. 8) \*,

$$N^2 = \varepsilon - g = 1 - \frac{A^2 M}{(x - M)(x + 1)}; \quad (3.39)$$

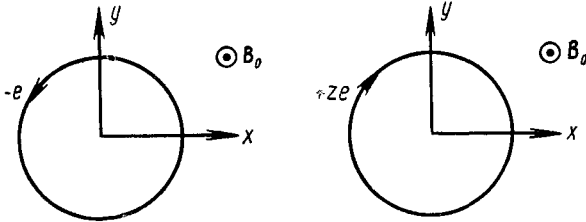


Рис. 8.

для волны  $E_x = iE_y$  (правое вращение)

$$N^2 = \varepsilon + g = 1 - \frac{A^2 M}{(x + M)(x - 1)}. \quad (3.39a)$$

В первом случае имеется резонанс на электронной циклотронной частоте, во втором — на ионной. Закон движения зарядов в поле волны нетрудно найти из выражения (3.4). Так, для волны, в которой  $E_x = iE_y$ ,

$$x_i = -\frac{ze}{m_i \omega (\omega - \omega_{Bi})} E_x; \quad y_i = i \frac{ze}{m_i \omega (\omega - \omega_{Bi})} E_y. \quad (3.40)$$

Пусть  $E_x = E_0 e^{i\psi}$ , так что  $\text{Re } E_x = E_0 \cos \psi$ . Тогда вещественные координаты смещения зарядов удовлетворяют соотношению

$$x_i^2 + y_i^2 = \frac{z^2 e^2}{m_i^2 \omega^2 (\omega - \omega_{Bi})^2} E_0^2. \quad (3.40a)$$

Кроме двух волн с круговой поляризацией, в рассматриваемом случае ( $\theta = 0$ ) имеется решение  $\eta E_z = 0$ , т. е.  $\eta = 0$  при  $E_z \neq 0$ .

\* Для определения направления вращения выпишем вещественные компоненты поля:

$$E_y \sim \text{Re } e^{-i\omega t} = \cos \omega t; \quad E_x \sim \text{Re } (-ie^{-i\omega t}) = -\sin \omega t.$$

Отсюда  $\text{tg } \varphi = \frac{E_x}{E_y} = -\text{tg } \omega t$ , т. е.  $\varphi = -\omega t$ .

Это решение, как и в отсутствие магнитного поля, представляет собой продольные колебания плазмы.

Рассмотрим теперь случай чисто поперечного распространения  $\theta = \frac{\pi}{2}$ . В этом случае  $N_1^2 = \frac{\varepsilon^2 - g^2}{\varepsilon}$ ,  $N_2^2 = \eta$ ,  $\alpha_x$  принимает значения 0 или  $\infty$ , что соответствует линейной поляризации волн (в плоскости, перпендикулярной к направлению распространения). Согласно формулам (1. 22), в системе координат, где вектор  $\mathbf{k}$  направлен по оси  $z$ ,  $\varepsilon_{xy} = -\varepsilon_{yx} = 0$ ,  $\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx} = 0$  (магнитное поле  $\mathbf{B}_0$  направлено по оси  $x$ ).

Система (1. 15) имеет вид

$$\left. \begin{aligned} (N^2 - \eta) E_x &= 0; \\ (N^2 - \varepsilon_2) E_y + igE_z &= 0; \\ -igE_y - \varepsilon_1 E_z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3. 41)$$

Для волны, у которой электрический вектор направлен вдоль магнитного поля ( $E_y = E_z = 0$ ,  $E_x \neq 0$ ), квадрат показателя преломления такой же, как и без поля:  $N^2 = \eta$ . Это чисто поперечная, линейно поляризованная волна.

Для волны с электрическим вектором, лежащим в плоскости, перпендикулярной к магнитному полю ( $E_x = 0$ ), квадрат показателя преломления равен

$$N^2 = \frac{\varepsilon^2 - g^2}{\varepsilon} = \frac{(x^2 - 1)(x^2 - M^2) - 2MA^2(x^2 - M) + M^2A^4}{(x^2 - 1)(x^2 - M^2) - MA^2(x^2 - M)}. \quad (3. 42)$$

Существенно, что в этой волне продольная компонента электрического поля не равна нулю ( $E_z \neq 0$ ). Причина этого заключается в том, что заряды дрейфуют в направлении оси  $z$  в скрещенных полях  $E_y$ ,  $B_0$ . Скорости дрейфа электронов и ионов одинаковы только при  $\omega \ll \omega_{Bl}$ . В общем же случае они различны, поэтому происходит разделение зарядов, приводящее к возникновению продольного поля  $E_z = -i \frac{g}{\varepsilon} E_y$ . При низких частотах  $g/\varepsilon \rightarrow 0$ , и отношение  $E_z/E_y$  становится исчезающе малым. Однако в тех точках, где  $N^2 \rightarrow \infty$ , ситуация совершенно противоположная. Поперечное поле исчезает (это видно из второго уравнения системы (3. 41)).

Уравнение колебаний принимает вид  $\varepsilon E_z = 0$ , т. е.  $\varepsilon = 0$  при  $E_z \neq 0$ .

Рассмотрим эти продольные колебания несколько подробнее. Движение электрона в скрещенных полях  $E_z$ ,  $B_x^0$  описывается уравнениями

$$\left. \begin{aligned} -i\omega v_y &= -v_z \omega_{Be}; \\ -i\omega v_z &= -\frac{e}{m} E_z + v_y \omega_{Be}. \end{aligned} \right\} \quad (3. 43)$$

Пусть  $E_z = E_0 e^{i\psi}$ , так что  $\text{Re} E_z = E_0 \cos \psi$ , тогда для вещественных смещений получим

$$y = -\frac{e}{m(\omega_{Be}^2 - \omega^2)} \frac{\omega_{Be}}{\omega} E_0 \sin \psi; \quad z = \frac{-e}{m(\omega_{Be}^2 - \omega^2)} E_0 \cos \psi. \quad (3.44)$$

Электрон в поле волны описывает эллипс

$$\frac{y^2}{\omega_{Be}^2} + \frac{z^2}{\omega^2} = \frac{e^2 E_0^2}{m_e^2 (\omega_{Be}^2 - \omega^2)^2 \omega^2}, \quad (3.45)$$

который при  $\omega \ll \omega_{Be}$  сильно вытянут в направлении, перпендикулярном к векторам  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{B}$  (рис. 9). Скорость электрона в направлении вектора  $\mathbf{k}$  может быть значительно меньше скорости вдоль оси  $y$  и поэтому, несмотря на большое различие в массах электрона и иона, может сравниться со скоростью ионов. Рассмотрим, например, случай  $\omega_{Bi} \ll \omega \ll \omega_{Be}$ . В первом приближении электрон совершает дрейф в направлении оси  $y$ :

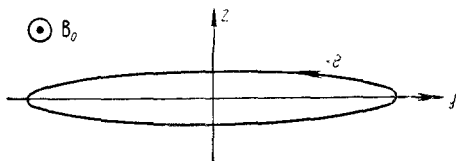


Рис. 9.

$$v_{ye} = \frac{e}{m_e \omega_{Be}} E_z. \quad (3.46)$$

Скорость электрона в направлении распространения волны равна

$$v_{ze} = i \frac{\omega}{\omega_{Be}} v_y = i \frac{e\omega}{m_e \omega_{Be}^2} E_z. \quad (3.47)$$

Для ионов при условии  $\omega \gg \omega_{Bi}$  можно пренебречь влиянием магнитного поля, так что

$$v_{zi} = i \frac{ze}{m_i \omega} E_z. \quad (3.48)$$

Таким образом, плотность тока равна  $j_z = zen_i (v_{zi} - v_{ze}) = i \frac{z^2 e^2 n_i}{m_i \omega} \left(1 - \frac{m_i}{zm_e} \frac{\omega^2}{\omega_{Be}^2}\right) E_z$ . Условие  $\text{div D} = 0$  или эквивалентное ему  $D_z = -i \frac{\omega}{c} E_z + \frac{4\pi}{c} j_z = 0$  дает дисперсионное уравнение

$$\omega - \frac{\omega_{0i}^2}{\omega} \left(1 - \frac{m_i}{m_e z} \frac{\omega^2}{\omega_{Be}^2}\right) = 0. \quad (3.49)$$

Отсюда определяется значение  $\omega_0^{\infty}$ , совпадающее с выражением (3.25) при  $A^2 \gg 1$  (что соответствует сделанному приближению  $\omega \gg \omega_{Bi}$ ). В частности, при  $A^2 \gg M$  можно пренебречь током

смещения  $-i \frac{\omega}{c} E_z$ . Значение  $\omega_2^\infty$  определяется при этом из условия  $j_z = 0$ , т. е.  $v_{ze} = v_{zi}$ . Оно не зависит от плотности плазмы и равно [66, 67]

$$\omega_2^\infty = \sqrt{\omega_{Be} \omega_{Bi}}. \quad (3.50)$$

При этом скорость электронов вдоль оси  $y$  в  $\sqrt{M}$  раз больше скорости вдоль оси  $z$ .

При переходе от чисто поперечного распространения к косому ( $\theta \neq \frac{\pi}{2}$ ) характер разобранных продольных колебаний существенно меняется. При  $\theta \neq \frac{\pi}{2}$  в продольной волне имеется компонента электрического поля вдоль  $\mathbf{B}_0$ . Электроны получают возможность двигаться вдоль силовых линий магнитного поля:

$$\left. \begin{aligned} v_{xe} &= i \frac{\omega_{Be}}{\omega} \cos \theta v_y; \\ v_{ze} &= v_{xe} \operatorname{ctg} \theta - i \frac{\omega}{\omega_{Be} \sin \theta} v_y. \end{aligned} \right\} \quad (3.51)$$

При этом их вклад в плотность тока  $j_z$  при  $\left| \frac{\pi}{2} - \theta \right| \gg \frac{1}{\sqrt{M}}$  значительно превосходит вклад ионов. Из условия  $v_{ze} = 0$  ( $j_z = 0$ ) находим частоту продольных колебаний в виде

$$\omega_2^\infty = \omega_{Be} \cos \theta. \quad (3.52)$$

Это же значение  $\omega_2^\infty$  получается при условии  $A^2 \gg M$  (т. е.  $\omega_{0e}^2 \gg \omega_{Be}^2$ ) также из формулы (3.22).

При частотах  $\omega \gg \omega_2^\infty$  смещением ионов можно пренебречь для всех углов  $\theta$ . Рассмотрим снова продольные колебания при  $\theta = \frac{\pi}{2}$ . Скорость электрона определяется из уравнений (3.43):

$v_z = i \frac{e\omega}{m_e (\omega_{Be}^2 - \omega^2)} E_z$ . Отсюда  $D_z = 1 - \frac{\omega_{0e}^2}{\omega^2 - \omega_{Be}^2}$ . Условие  $D_z = 0$  определяет частоту колебаний  $\omega_3^\infty$  [сравните выражение (3.24)]:

$$\omega_3^\infty = \sqrt{\omega_{0e}^2 + \omega_{Be}^2}. \quad (3.53)$$

Упрощенные аналитические выражения для  $N^2$  можно получить для трех областей частот.

Первая область — низкие частоты:  $\omega \ll \sqrt{\omega_{Bi} \omega_{Be}}$ . Здесь

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_{0i}^2}{\omega^2 - \omega_{Bi}^2}; \quad g = \frac{-\omega_{0i}^2 \omega}{\omega_{Bi} (\omega^2 - \omega_{Bi}^2)}; \quad \eta = 1 - M \frac{\omega_{0i}^2}{\omega^2}. \quad (3.54)$$



Учитывая, что величина  $\eta$  очень велика, из формулы (3. 9) получаем (первый член в разложении по  $1/\eta$ )

$$N^2 = \frac{\varepsilon (1 + \cos^2 \theta) \pm \sqrt{\varepsilon^2 \sin^4 \theta + 4g^2 \cos^2 \theta}}{2 \cos^2 \theta}. \quad (3. 55)$$

Если в  $\varepsilon$  можно пренебречь единицей, то это выражение в явном виде таково:

$$N^2 = A^2 \frac{2}{1 + \cos^2 \theta \pm \sqrt{1 + 2 \left( 2 \frac{\omega^2}{\omega_{Be}^2} - 1 \right) \cos^2 \theta + \cos^4 \theta}}. \quad (3. 56)$$

Это выражение справедливо при  $\left| \frac{\pi}{2} - \theta \right| > \frac{1}{\sqrt{M}}$ , когда член  $\eta \cos^2 \theta$  еще превышает  $\varepsilon \sin^2 \theta$  в знаменателе выражения (3. 9). Выпадение члена  $\eta$  из  $N^2$  соответствует пренебрежению компонентой электрического поля вдоль магнитного поля  $E_{z_0} = \frac{1}{\eta} D_{z_0}$ . Это электрическое поле уничтожается движением электронов вдоль силовых линий магнитного поля, происходящим при малых частотах безынерционно.

Вторая область — высокие частоты:  $\omega \gg \sqrt{\omega_{0i} \omega_{Be}}$ , где можно вовсе пренебречь смещением ионов. При этом

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_{0e}^2}{\omega^2 - \omega_{Be}^2}; \quad g = \frac{\omega_{0e}^2 \omega_{Be}}{(\omega^2 - \omega_{Be}^2) \omega}; \quad \eta = 1 - \frac{\omega_{0e}^2}{\omega^2}; \quad (3. 57)$$

$$N^2 = 1 - \frac{\omega_{Ce}^2}{\omega^2} \times$$

$$\times \frac{2(\omega_{0e}^2 - \omega^2) + \omega_{Be}^2 \sin^2 \theta \pm \sqrt{\omega_{Be}^4 \sin^4 \theta + 4 \frac{\omega_{Be}^2}{\omega^2} (\omega_{0e}^2 - \omega^2) \cos^2 \theta}}{2 \left\{ \omega_{0e}^2 + \omega_{Be}^2 - \omega^2 - \frac{\omega_{0e}^2 \omega_{Be}^2}{\omega^2} \cos^2 \theta \right\}}. \quad (3. 58)$$

Это выражение хорошо известно в теории распространения радиоволн в ионосфере. В плотной плазме ( $\omega_{0e}^2/\omega_{Be}^2 \gg 1$ ) это выражение для широкого диапазона углов, удовлетворяющих условию

$$\frac{\omega^2 \omega_{Be}^2}{(\omega_{0e}^2 - \omega^2)^2} \frac{\sin^4 \theta}{4 \cos^2 \theta} \ll 1, \quad (3. 59)$$

значительно упрощается:

$$N^2 = 1 - \frac{\omega_{0e}^2}{\omega(\omega \pm \omega_{Be} \cos \theta)}. \quad (3. 60)$$

Эта формула напоминает выражение для показателя преломления при продольном распространении волн, с той разницей, что в знаменателе вместо  $\omega_{Be}$  теперь стоит  $\omega_{Be} \cos \theta$ . Поэтому этот случай называют «квазипродольным» распространением волн.

Третья область — промежуточные частоты:  $\omega_{Bi} \ll \omega \ll \omega_{Be}$ . В этой области смещение ионов необходимо учитывать, но влиянием магнитного поля на их движение можно пренебречь, так что  $\epsilon_{\alpha\beta} = \epsilon_{\alpha\beta}^{\text{эл}} - \frac{\omega_{0i}^2}{\omega^2} \delta_{\alpha\beta}$ , где  $\epsilon_{\alpha\beta}^{\text{эл}}$  определяется формулами (3.57) при  $\omega \ll \omega_{Be}$ . Компоненты тензора  $\epsilon_{\alpha\beta}$  при этом равны

$$\epsilon = 1 + \frac{\omega_{0e}^2}{\omega_{Be}^2} - \frac{\omega_{0i}^2}{\omega^2}; \quad g = -\frac{\omega_{0e}^2}{\omega\omega_{Be}}; \quad \eta = 1 - \frac{\omega_{0k}^2}{\omega^2}. \quad (3.61)$$

Нетрудно видеть, что  $|\eta| \gg |g|$ ,  $|\epsilon|$ , так что для углов  $\left| \frac{\pi}{2} - \theta \right| > \frac{1}{\sqrt{M}}$  можно использовать формулу (3.55). Так как, кроме того,  $|g| \gg \epsilon$ , то эта формула сильно упрощается и дает

$$N^2 = \pm \frac{g}{\cos \theta} = \pm \frac{\omega_{0e}^2}{\omega\omega_{Be} \cos \theta}. \quad (3.62)$$

Для углов  $\left| \frac{\pi}{2} - \theta \right| < \frac{1}{\sqrt{M}}$  эта формула неприменима. Нужно пользоваться общей формулой (3.9).

В заключение рассмотрим одну существенную особенность поведения электромагнитных волн при частоте, совпадающей с циклотронными частотами зарядов плазмы  $\omega = \omega_{Bi}$  и  $\omega = \omega_{Be}$ . Как мы видели, в случае продольного распространения имеется две волны с круговой поляризацией, причем одна из них может находиться в резонансе с вращением заряда. Случай чисто продольного распространения  $\theta = 0$  является, однако, особым случаем.

При переходе к косым направлениям ( $\theta \neq 0$ ) характер поляризации в корне меняется. Оказывается, что компонента электрического вектора, перпендикулярная к вектору  $\mathbf{V}_0$ , при  $\omega^2 = \omega_B^2$  также имеет круговую поляризацию, но в обеих волнах вращается в направлении, противоположном вращению заряда. Если взять нормировку векторов поляризации в виде  $E_{y1} = E_{y2} = \text{const}$ , то при  $\omega^2 = \omega_B^2$  эллипсы поляризации представляют собой сечения цилиндра с осью вдоль  $\mathbf{V}_0$ . На рис. 10 стрелками показано относительное направление вращения векторов  $\mathbf{E}$  в волнах 1 и 2 и заряда (в основании цилиндра).

Эта особенность поляризации непосредственно вытекает из формулы, связывающей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{D}$ . Из выражения (3.5) для вектора индукции  $\mathbf{D}$  нетрудно получить

$$D_x \pm iD_y = \left( 1 - \sum \frac{\omega_0^2}{\omega(\omega \mp \omega_B)} \right) (E_x \pm iE_y). \quad (3.63)$$

При конечном  $\mathbf{E}$  вектор  $\mathbf{D} = N^2 \mathbf{E}_\perp$  конечен, если  $\omega^2 = \omega_B^2$ , за исключением случая  $\theta = 0$ , где  $N^2 = \infty$ . Поэтому из выра-

жения (3. 63), беря верхний, а затем нижний знак, соответственно получим:

$$E_x = -iE_y; \quad \omega = \omega_{Bi}; \quad (3.64)$$

$$E_x = iE_y; \quad \omega = \omega_{Be}. \quad (3.65)$$

Как видно из сравнения с разобранным выше случаем продольного распространения, направление вращения вектора  $\mathbf{E}$  противоположно направлению вращения зарядов.

**Задача.** Вывести выражение тензора  $\epsilon_{\alpha\beta}$  в гидродинамическом приближении с учетом газокINETического давления заряженных частиц.

**Решение.** Исходим из уравнений движения

$$m\mathbf{n} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -im\mathbf{n}\omega \mathbf{v} = -\nabla p^{(1)} + en \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}\mathbf{B}_0] \right), \quad (1)$$

где, согласно выражению (2. 4),  $p^{(1)} = \gamma \frac{(k\mathbf{v})}{\omega} p =$

$= \gamma \frac{(k\mathbf{v})}{\omega} nT$ . Разрешая это уравнение относительно  $\mathbf{v}$ , найдем плотность тока  $\mathbf{j} = \sum en\mathbf{v}$  и вектор электрической индукции  $\mathbf{D} = \mathbf{E} + i \frac{4\pi}{\omega} \mathbf{j}$ . Сравнивая полученное выражение с  $D_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta} E_\beta$ , находим  $\epsilon_{\alpha\beta}$ . В системе координат с осью  $z^0$ , направленной вдоль  $\mathbf{B}_0$ , этот тензор имеет вид (вектор  $\mathbf{k}$  лежит в плоскости  $x^0z^0$ )

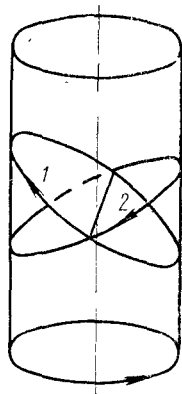


Рис. 10.

$$\epsilon_{\alpha\beta}^0 = \delta_{\alpha\beta} - \sum \frac{\omega_0^2}{\omega^2 - \omega_B^2 - k^2 v_T^2 + k^2 v_1^2 - \frac{\omega_B^2}{\omega^2} \cos^2 \theta} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} 1 - \frac{k_z^2 v_T^2}{\omega^2}, & i \frac{\omega_B}{\omega} \left( 1 - \frac{k_z^2 v_T^2}{\omega_B^2} \right), & \frac{k_x k_z v_T^2}{\omega^2} \\ -i \frac{\omega_B}{\omega} \left( 1 - \frac{k_z^2 v_T^2}{\omega^2} \right), & 1 - \frac{k^2 v_T^2}{\omega^2}, & -i \frac{\omega_B}{\omega} \frac{k_x k_z v_T^2}{\omega^2} \\ \frac{k_x k_z v_T^2}{\omega^2}, & i \frac{\omega_B}{\omega} \frac{k_x k_z v_T^2}{\omega^2}, & 1 - \frac{\omega_B^2 + k^2 v_T^2}{\omega^2} \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Здесь  $v_T^2 = \gamma T/m$ , суммирование производится по сортам зарядов.

Полученный тензор полезен для оценки роли различных компонент  $\epsilon_{\alpha\beta}$  в дисперсионном уравнении при учете теплового движения зарядов.

В системе координат с осью  $z$ , направленной вдоль  $\mathbf{k}$  по формулам преобразования (1. 22) получаем

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} - \sum \frac{\omega_0^2}{\omega^2 - \omega_B^2 - k^2 v_T^2 + k^2 v_T^2 \frac{\omega_B^2}{\omega^2} \cos^2 \theta} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} 1 - \frac{\omega_B^2 \sin^2 \theta + k^2 v_T^2}{\omega^2}, i \frac{\omega_B}{\omega} \left(1 - \frac{k^2 v_T^2}{\omega^2}\right) \cos \theta, \frac{\omega_B^2}{\omega^2} \sin \theta \cdot \cos \theta \\ -i \frac{\omega_B}{\omega} \left(1 - \frac{k^2 v_T^2}{\omega^2}\right) \cos \theta, 1 - \frac{k^2 v_T^2}{\omega^2}, -i \frac{\omega_B}{\omega} \sin \theta \\ \frac{\omega_B^2}{\omega^2} \sin \theta \cdot \cos \theta, i \frac{\omega_B}{\omega} \sin \theta, 1 - \frac{\omega_B^2}{\omega^2} \cos^2 \theta \end{pmatrix} \quad (3)$$

#### § 4. Резонансы при учете теплового движения

При рассмотрении колебаний в предыдущих параграфах предполагалось, что в нулевом приближении заряд находится в одном месте, смещаясь только под действием поля волны. В действительности же за время колебания заряд может сместиться благодаря тепловому движению на расстояние, сравнимое с длиной волны. Это смещение становится существенным для замедленных волн, фазовая скорость которых меньше скорости света и может сравниваться со скоростью заряда. При этом могут возникнуть характерные резонансные эффекты, приводящие к обмену энергией между волной и зарядами. Для выяснения условий резонанса определим силу, действующую на движущийся заряд при прохождении волны вида  $e^{i(kr - \omega t)}$ . В линейном приближении эта сила, очевидно, равна

$$\mathbf{F} = e \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_0 \mathbf{B}] \right\} = e \left\{ \mathbf{E} \left( 1 - \frac{k v_0}{\omega} \right) + \frac{k (\mathbf{v}_0 \mathbf{E})}{\omega} \right\}. \quad (4. 1)$$

Здесь  $\mathbf{v}_0$  — скорость невозмущенного движения заряда,  $\mathbf{B} = \frac{c}{\omega} [\mathbf{kE}]$  — магнитное поле волны. Электрическое поле  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(kr - \omega t)}$  нужно брать в точке, где заряд находится в момент времени  $t$ . При этом, очевидно, в линейном приближении под  $\mathbf{r}(t)$  следует понимать радиус-вектор невозмущенного движения заряда.

Пусть начальный радиус-вектор заряда есть  $\mathbf{r}_0 = \{x_0, y_0, z_0\}$ . В отсутствие постоянного магнитного поля и в пренебрежении взаимодействием между зарядами  $\mathbf{v}_0 = \text{const}$  и заряд движется по прямой линии:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t. \quad (4. 2)$$

Фаза волны равна

$$kr - \omega t = k\mathbf{r}_0 + (k\mathbf{v}_0 - \omega) t. \quad (4. 3)$$

При условии

$$\omega - k v_0 = 0 \quad (4.4)$$

сила, действующая на заряд, не зависит от времени. Это условие резонанса выражает тот факт, что проекция скорости заряда на волновой вектор совпадает с фазовой скоростью волны

$$\frac{\omega}{k} = v_0 \cos(\widehat{k v_0}). \quad (4.5)$$

Поскольку в плазме без магнитного поля фазовая скорость поперечных волн больше скорости света, то для поперечных волн условие резонанса не выполняется. Резонанс может быть, однако, на продольных волнах, фазовая скорость которых, как мы видели в § 2, может стать сравнимой со скоростью теплового движения зарядов. Взаимодействие продольных плазменных волн с зарядами приводит к пещифическому затуханию волн, которое будет рассмотрено в § 5 и 10.

Пусть теперь плазма находится в однородном магнитном поле  $\mathbf{B}_0$ , направленном вдоль оси  $z$ . Закон движения заряда в этом случае таков:

$$\left. \begin{aligned} v_{x0}(t) &= v_{\perp 0} \cos(\omega_B t + \varphi_0) = v_{x0}(0) \cos \omega_B t + v_{y0}(0) \sin \omega_B t; \\ v_{y0}(t) &= -v_{\perp 0} \sin(\omega_B t + \varphi_0) = v_{y0}(0) \cos \omega_B t - v_{x0}(0) \sin \omega_B t; \\ v_{z0}(t) &= v_{z0}. \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

Здесь  $\omega_B$  — циклотронная частота заряда,  $\varphi_0$  — начальная фаза:

$$\begin{aligned} \omega_B &= \frac{e B_0}{m c} = \frac{e B_0}{m_0 c} \sqrt{1 - \beta^2}; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{v_{y0}}{v_{x0}}; \quad v_{\perp 0} = \\ &= \sqrt{v_{x0}^2 + v_{y0}^2}. \end{aligned} \quad (4.6a)$$

Пусть волновой вектор волны лежит в плоскости  $xz$ :

$$\mathbf{k} = \{k_x, 0, k_z\}. \quad (4.7)$$

Тогда фаза волны в точке, где находится в момент  $t$  рассматриваемый заряд, будет

$$\mathbf{k} \mathbf{r} - \omega t = \mathbf{k} \mathbf{r}_0 - (\omega - k_z v_{z0}) t + \frac{k_x v_{\perp}}{\omega_B} [\sin(\omega_B t + \varphi_0) - \sin \varphi_0]. \quad (4.8)$$

Используя разложение (см. приложение I)

$$e^{i \alpha \sin x} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\alpha) e^{i n x}, \quad (4.9)$$

находим

$$\begin{aligned} & e^{i(\mathbf{k} \mathbf{r} - \omega t)} = \\ & = e^{i \mathbf{k} \mathbf{r}_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n\left(\frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega_B}\right) e^{i n \varphi_0 - i \frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega_B} \sin \varphi_0 - i(\omega - n \omega_B - k_z v_{z0}) t} \end{aligned} \quad (4.10)$$

Таким образом, на заряд, движущийся в магнитном поле, действует сила, состоящая из слагаемых с временной зависимостью  $e^{-i\omega't}$ , где  $\omega' = \omega - n\omega_B - k_z v_{z_0}$ . Резонанс, как мы знаем из § 3, наступает при совпадении  $\pm \omega'$  с циклотронной частотой:  $\omega - (n \pm 1)\omega_B - k_z v_{z_0} = 0$ . Вводя переобозначение  $n \pm 1 \rightarrow n$ , получим условие резонанса в виде

$$\omega - n\omega_B - k_z v_{z_0} = 0, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4.11)$$

Отметим, что, согласно эффекту Допплера, частота  $\tilde{\omega}$  излучателя, движущегося вдоль оси  $z$  со скоростью  $v_{z_0}$ , связана с наблюдаемой частотой в лабораторной системе координат соотношением

$$\tilde{\omega} = \frac{\omega - k_z v_{z_0}}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (4.12)$$

Движение заряда в магнитном поле можно рассматривать как движение осциллятора конечных размеров («ларморовский кружок») вдоль силовой линии. Учитывая, что  $\omega_B = \omega_B^0 \sqrt{1 - \beta^2}$ , где  $\omega_B^0 = \frac{eB_0}{m_0 c}$  — собственная частота этого осциллятора в системе, в которой он покоится, мы видим, что условие (4.11) означает совпадение частоты электромагнитной волны с одним из обертонов собственной частоты осциллятора. В частности, при  $n = 0$  это условие, как и условие (4.4), означает, что в системе координат, где заряд покоится, частота волны равна нулю (постоянное поле).

Заряды, находящиеся вблизи резонанса, как уже отмечалось, могут эффективно обмениваться энергией с волной. В зависимости от вида функции распределения зарядов по скоростям это взаимодействие может приводить к затуханию волн или к их усилению.

Уравнение движения заряда при  $v_0 \neq 0$  может быть записано в линейном приближении в виде

$$m \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - [\mathbf{v} \boldsymbol{\omega}_B] \right) = F(\mathbf{r}(t), t) = F_0 e^{i \left( k r_0 + k \int_0^t v_0(t') dt' - \omega t \right)},$$

где  $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \int_0^t \mathbf{v}_0(t') dt'$  — радиус-вектор заряда в отсутствие волны.

Можно поступить несколько иначе, написав для движения частиц гидродинамические уравнения (в переменных Эйлера):

$$m \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}_0 \nabla) \mathbf{v} - [\mathbf{v} \boldsymbol{\omega}_B] \right) = F(\mathbf{r}, t) = F_0 e^{i(kr - \omega t)},$$

где теперь  $\mathbf{r}$  — независимая переменная.

При расчетах тензора  $\epsilon_{\alpha\beta}$  удобнее пользоваться более формальным методом кинетического уравнения.

## § 5. Затухание плазменных колебаний

Наиболее характерными для плазмы являются продольные колебания, происходящие с частотой (§ 2)

$$\omega^2 = \omega_{0e}^2 + \gamma \frac{k^2 T_e}{m_e}. \quad (5.1)$$

Колебания плазмы с частотой  $\omega = \omega_{0e}$  были теоретически и экспериментально исследованы впервые Ленгмюром и Тонксом (1929 г.). Власов (1938 г.) на основе впервые примененного им кинетического уравнения с самосогласованным полем установил закон дисперсии этих волн. Несколько позднее Ландау теоретически показал [2], что плазменные волны затухают даже в отсутствие столкновений.

Причина затухания, исследованного Ландау, может быть уяснена из следующих качественных соображений [68]. Заряды, движущиеся со скоростью, несколько большей фазовой скорости волны ( $v_0 > \frac{\omega}{k}$ ), могут затормозиться электрическим полем волны и изменить направление своего движения относительно волны. Но при отражении от потенциального барьера, движущегося со скоростью  $\omega/k$ , энергия частицы изменяется на величину\*

$$\Delta \epsilon = 2m \frac{\omega}{k} \left( \frac{\omega}{k} - v_0 \right). \quad (5.2)$$

При  $v_0 > \frac{\omega}{k}$  изменение энергии  $\Delta \epsilon < 0$ , т. е. частица теряет энергию, отдавая ее волне. Точно такой же формулой выражается изменение энергии частицы, движущейся со скоростью, несколько меньшей фазовой ( $v_0 < \frac{\omega}{k}$ ). Эти частицы как бы подхлестываются догоняемой их волной и приобретают энергию  $\Delta \epsilon > 0$ . Очевидно, что отражение испытывают те заряды, энергия которых в системе координат, связанной с волной, меньше потенциальной энергии заряда в поле  $E = E_0 \sin kx$ , т. е.

$$- \sqrt{\frac{2eE_0}{mk}} < u < \sqrt{\frac{2eE_0}{mk}}. \quad (5.3)$$

Ширина интервалов скоростей, в которых  $\Delta \epsilon > 0$  и  $\Delta \epsilon < 0$ , одинакова. Но в одинаковом по величине интервале скоростей при максвелловском распределении число быстрых частиц (теряющих энергию) меньше числа медленных (отбирающих энергию у волны).

\* Относительная скорость частицы  $u = v_0 - \frac{\omega}{k}$  при отражении изменит знак и станет равной  $u_1 = \frac{\omega}{k} - v_0$ ; следовательно, абсолютная скорость частицы после отражения будет  $v_1 = u_1 + \frac{\omega}{k} = 2 \frac{\omega}{k} - v_0$ . Вычитая  $mv_1^2/2$  из  $mv_0^2/2$ , найдем  $\Delta \epsilon$  в соответствии с выражением (5.2).

Поэтому суммарная энергия, приобретаемая зарядами, положительна, волна поглощается. На рис. 11 знаками плюс отмечена доля частиц, поглощающих энергию, а знаками минус — доля частиц, отдающих свою энергию волне. Если функция распределения при  $v = \frac{\omega}{k}$  растет с  $v$  (как это показано на рис. 11, б), то будет происходить усиление волны. Частицы, занимающие статистически менее вероятные состояния с большей энергией, под влиянием волны будут переходить в более вероятные состояния с меньшей энергией, отдавая избыток энергии волне. Если частоту колебаний разделить на действительную и мнимую части ( $\omega = \omega_1 - i\omega_2$ ), так что положительным  $\omega_2$  соответствует затухание колебаний, то, как видно из предыдущего, знак  $\omega_2$  противоположен знаку производной функции распределения по  $v$  при  $v = \frac{\omega}{k}$ :

$$\omega_2 \sim - \left. \frac{\partial f}{\partial v} \right|_{v = \frac{\omega}{k}}. \quad (5.4)$$

Эффект затухания (усиления) волн, как видно из приведенных рассуждений, получается при учете лишь однократного отражения заряда от потенциального бугра.

Если за время прохождения зарядом расстояния между двумя соседними буграми волна не затухнет (не усилится), то при отражении от противоположного бугра те заряды, которые потеряли энергию при первом отражении, теперь приобретут ее, а те, которые приобрели — потеряют. В среднем изменения энергии зарядов не будет. Эффект затухания (усиления) волны будет отсутствовать. Частота колебаний заряда в потенциальной яме равна примерно  $ku \sim \sqrt{\frac{2eE_0}{m}} k$ , так что условие достаточно сильного затухания (усиления) волны имеет вид

$$\gamma \gg \sqrt{\frac{2eE_0}{m}} k. \quad (5.5)$$

Как будет видно ниже, затухание существенно при  $kv_T \sim \omega_0$ , при этом  $\gamma \sim \omega_0$ . С учетом этих значений  $k$  и  $\gamma$  неравенство (5.5) переписывается в виде

$$\frac{mv_T^2}{2} \gg \frac{eE_0}{k}. \quad (5.6)$$



Таким образом, затухание, расписанное Ландау, существует лишь в достаточно слабом поле, когда энергия, набираемая зарядом в электрическом поле на расстоянии порядка длины волны, значительно меньше первоначальной энергии заряда. Это есть обычное условие линейного приближения в электродинамике. Отсутствие бесстолкновительного затухания в нелинейном приближении можно пояснить тем, что в результате взаимодействия зарядов с волной их функция распределения исказится так, что при  $v = \frac{\omega}{k}$  появится «ступенька»

$$\left. \frac{\partial f}{\partial v} \right|_{v = \frac{\omega}{k}} = 0.$$

Заметим, что учет лишь одного отражения заряда от потенциального бугра эквивалентен наличию некоторого слабого механизма диссипации, например столкновений заряда с другими частицами, происходящих с частотой  $\nu$ , которая много больше частоты отражений, однако может быть еще значительно меньше, чем  $\gamma$  ( $\gamma \gg \nu \gg \sqrt{\frac{2eE_0}{m}} k$ ), так что суммарный эффект от  $\nu$  не зависит. Введение столкновений, частота которых впоследствии устремляется к нулю, является удобным формальным методом для расчета бесстолкновительного затухания.

Дисперсионное уравнение для плазменных колебаний с учетом бесстолкновительного затухания можно получить непосредственно из закона движения зарядов. Сначала получим это уравнение нестрого.

Рассмотрим группу частиц с плотностью  $\Delta n_0 = n_0 f \Delta v_0$ , имеющих скорости, близкие к  $v_0$ . Напишем уравнение движения и уравнение непрерывности для этой группы частиц при наличии волны  $E_z = E_0 e^{i(kz - \omega t)}$ , приняв во внимание потерю импульса и числа частиц из-за столкновений, частота которых  $\nu$  в дальнейшем будет устремлена к нулю:

$$m \left( \frac{\partial v^{(1)}}{\partial t} + v_0 \frac{\partial v^{(1)}}{\partial t} + \nu v^{(1)} \right) = e E_z; \quad (5.7)$$

$$\frac{\partial (\Delta n^{(1)})}{\partial t} + v_0 \frac{\partial (\Delta n^{(1)})}{\partial z} + \nu \Delta n^{(1)} = -\Delta n^0 \operatorname{div} \mathbf{v}^{(1)}. \quad (5.8)$$

Учитывая зависимость  $e^{i(kz - \omega t)}$ , находим

$$v^{(1)} = i \frac{e}{m(\omega - kv_0 + i\nu)} E_z; \quad \Delta n^{(1)} = \frac{kv^{(1)}}{\omega - kv_0 + i\nu} \Delta n_0. \quad (5.9)$$

Плотность тока, вызванная электрическим полем волны, оказывается равной

$$\Delta j_z = e(\Delta n_0 v^{(1)} + \Delta n^{(1)} v_0) = \Delta \sigma_{\parallel} E_z. \quad (5.10)$$

где

$$\Delta\sigma_{\parallel} = i \frac{e^2 \Delta n_0}{m} \frac{\omega + iv}{(\omega - kv_0 + iv)^2}. \quad (5.11)$$

Как указывалось в § 1, энергия, поглощаемая средой, определяется через эрмитову (в данном случае реальную) часть комплексной проводимости

$$\Delta Q = \frac{1}{2} \Delta\sigma'_{\parallel} E_0^2. \quad (5.12)$$

Из выражения (5.11) находим

$$\Delta\sigma'_{\parallel} = \text{Re} \Delta\sigma_{\parallel} = v \frac{e^2 \Delta n_0}{m} \frac{\omega^2 - k^2 v_0^2 + v^2}{[(\omega - kv_0)^2 + v^2]^2}. \quad (5.13)$$

При  $v \rightarrow 0$  в числителе можно опустить  $v^2$ . Из полученного выражения видно, что заряды поглощают энергию ( $\Delta\sigma'_{\parallel} > 0$ ), если

их скорость меньше фазовой скорости волны (в согласии с приведенными выше доводами). Наоборот, при условии  $v_0 > \frac{\omega}{k}$  заряды отдают энергию волне. Суммарный эффект должен зависеть от значения производной  $\frac{df}{dv_0}$  при  $v_0 = \frac{\omega}{k}$ . Действительно, выражение для суммарной комплексной проводимости можно преобразовать, используя интегрирование по частям, к интегралу, содержащему  $\frac{df}{dv_0}$ :

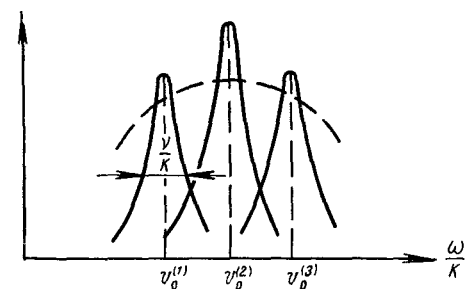


Рис. 12.

можно преобразовать, используя интегрирование по частям, к интегралу, содержащему  $\frac{df}{dv_0}$ :

$$\sigma_{\parallel} = i \frac{e^2 n_0}{m} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega + iv}{(\omega - kv_0 + iv)^2} f(v_0) dv_0 = -i \frac{e^2 n_0}{m} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v_0 \frac{df_0}{dv_0}}{\omega - kv_0 + iv} dv_0. \quad (5.14)$$

Действительная часть  $\sigma_{\parallel}$  равна

$$\sigma'_{\parallel} = - \frac{e^2 n_0}{m} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v}{(\omega - kv_0)^2 + v^2} v_0 \frac{df_0}{dv_0} dv_0. \quad (5.15)$$

Для выделенных групп частиц со скоростями, близкими к  $v_0^{(1)}$ ,  $v_0^{(2)}$ ,  $v_0^{(3)}$  и т. д., подынтегральное выражение имеет вид горбов с полуширинами, определяемыми значением  $v$  (рис. 12). При переходе к непрерывному распределению по скоростям расстояния между горбами уменьшаются. В результате наложения отдельных кривых получается суммарная кривая (изображенная

пунктиром), которая при  $v \rightarrow 0$  зависит только от формы функции распределения. Интеграл (5. 15) берется очень просто. Выражение  $\frac{v}{(\omega - kv_0)^2 + v^2}$  обладает свойством  $\delta$ -функции. При  $v \rightarrow 0$  оно исчезающе мало всюду, за исключением узкой окрестности точки  $v_0 = \frac{\omega}{k}$ . В этой окрестности значение функции  $v_0 \frac{\partial f_0}{\partial v_0}$  можно считать постоянным. Вынесем это значение из-под знака интеграла. Оставшийся интеграл равен

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{v}{(\omega - kv_0)^2 + v^2} dv_0 = \frac{\pi}{|k|}. \quad (5. 16)$$

Таким образом,

$$\sigma'_{\parallel} = -\frac{e^2 n_0}{m} \frac{\pi}{|k|} \left[ v_0 \frac{\partial f}{\partial v_0} \right]_{v_0 = \frac{\omega}{k}}. \quad (5. 17)$$

Дисперсионное уравнение для рассматриваемых колебаний имеет вид

$$\varepsilon_{\parallel} = 1 + i \frac{4\pi\sigma_{\parallel}}{\omega} = 0. \quad (5. 18)$$

В отсутствие теплового движения  $\varepsilon_{\parallel} = 1 - \frac{\omega_{0e}^2}{\omega^2}$ , и собственная частота колебаний равна  $\omega = \omega_{0e}$ . Предполагая, что тепловые поправки к собственной частоте колебаний малы ( $kv_0 \ll \omega_{0e}$ ), найдем  $\text{Im}\sigma_{\parallel}$  разложением знаменателя подынтегрального выражения (5. 14) по отношению  $\frac{kv_0}{\omega}$  и интегрированием по частям:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v_0 \frac{\partial f_0}{\partial v_0}}{\omega - kv_0} dv_0 &= \frac{1}{\omega} \int_{-\infty}^{\infty} \left( 1 + \frac{kv_0}{\omega} + \frac{k^2 v_0^2}{\omega^2} + \dots \right) v_0 \frac{\partial f_0}{\partial v_0} dv_0 = \\ &= -\frac{1}{\omega} \left( 1 + 3 \frac{k^2 \overline{v_0^2}}{\omega^2} + \dots \right); \end{aligned} \quad (5. 19)$$

$$\overline{v_0^2} = \int_{-\infty}^{\infty} v_0^2 f(v_0) dv_0.$$

Итак,

$$\varepsilon_{\parallel} = 1 - \frac{\omega_{0e}^2}{\omega^2} \left( 1 + 3 \frac{k^2 \overline{v_0^2}}{\omega^2} + \dots \right) - i \frac{\omega_{0e}^2}{\omega} \frac{\pi}{|k|} \left[ v_0 \frac{\partial f_0}{\partial v_0} \right]_{v_0 = \frac{\omega}{k}}. \quad (5. 20)$$

Условие  $\varepsilon_{\parallel} = 0$  дает

$$\omega^2 = \omega_{0e}^2 \left( 1 + 3 \frac{k^2 v_0^2}{\omega^2} + \dots \right) + i \omega_{0e}^2 \frac{\pi \omega}{|k|} \left[ v_0 \frac{\partial f}{\partial v_0} \right]_{v_0 = \frac{\omega}{k}}. \quad (5.21)$$

Считая поправки, связанные с учетом теплового движения, малыми, заменим всюду в правой части  $\omega$  на  $\omega_{0e}$ . Полагая далее ( $\omega_2 \ll \omega_1$ )

$$\omega = \omega_1 - i\omega_2, \quad (5.22)$$

найдем

$$\omega_1^2 = \omega_{0e}^2 + 3k^2 \overline{v_0^2}; \quad \omega_2 = -\pi \frac{\omega_0^2}{2} \left[ \frac{v_0}{|k|} \frac{\partial f_0}{\partial v_0} \right]_{v_0 = \frac{\omega}{k}}. \quad (5.23)$$

При максвелловском распределении  $f = \left( \frac{m_e}{2\pi T} \right)^{1/2} e^{-\frac{m_e v_0^2}{2T}}$  имеем [2]

$$\omega_1^2 = \omega_{0e}^2 + 3k^2 \frac{T_e}{m_e} = \omega_0^2 (1 + 3k^2 a^2); \quad (5.24)$$

$$\omega_2 = \omega_0 \frac{\sqrt{\pi}}{(2k^2 a^2)^{3/2}} e^{-\frac{1}{2k^2 a^2}}, \quad (5.25)$$

где  $a = \sqrt{T/4\pi e^2 n_0}$  — дебаевский радиус.

Длинноволновые возмущения ( $ka \ll 1$ ) затухают слабо, возмущения же, длина волны которых приближается к дебаевскому радиусу ( $ka \sim 1$ ), затухают за один период колебаний (строго говоря, при  $\omega_2 \sim \omega_0$  формула (5.25) уже неприменима, но качественный вывод о сильном затухании при  $ka \geq 1$  правилен). Таким образом, как уже указывалось в § 1, электронные колебания плазмы происходят в очень узкой окрестности значения  $\omega = \omega_{0e}$ .

Нестрогость приведенного вывода дисперсионного уравнения заключается в следующем. Как видно из формул (5.14) и (5.15), знак  $\text{Re}\sigma_{\parallel}$  связан со знаком мнимой части знаменателя подынтегрального выражения (5.14). Так, для максвелловского распределения из  $\nu > 0$  следует  $\text{Re}\sigma_{\parallel} > 0$  и соответственно  $\text{Im}\omega = -\omega_2 < 0$ , что дает затухание. Но, вычисляя интеграл (5.14), мы не обращали внимания на то, что впоследствии  $\omega$  окажется комплексной величиной. Если бы мы учли, что  $\omega = \omega_1 - i\omega_2$  при  $\nu \rightarrow 0$ , где  $\omega_2 > 0$ , то знаменатель в выражении (5.14) принял бы вид  $\omega_1 - kv_0 + i(\nu - \omega_2)$  и при  $\nu < \omega_2$ , казалось бы, мы получили  $\text{Re}\sigma_{\parallel} < 0$ , что соответствует усилению колебаний (!). Но этот вывод совсем неправилен. Что это так, видно хотя бы из того, что при  $\text{Re}\sigma_{\parallel} < 0$  дисперсионное уравнение дало бы  $\text{Im}\omega > 0$ , но это противоречит только что использованному при вычислении  $\text{Re}\sigma_{\parallel}$  значению  $\omega = \omega_1 - i\omega_2$ ,  $\omega_2 > 0$ . Такое же противоречие получилось бы, если при вычислении интеграла

положить  $\omega = \omega_1 + i\omega_2$  ( $\omega_2 > 0$ ), что соответствует раскатке колебаний. При этом, как и в случае, когда знаменатель имеет вид  $\omega - kv_0 + iv$ , из дисперсионного уравнения получается  $\text{Im}\omega < 0$  в противоречии с принятым предположением  $\text{Im}\omega = \omega_2 > 0$ . Эти парадоксы связаны с некорректностью метода, которым было получено дисперсионное уравнение при учете теплового движения. Дело в том, что решение вида  $e^{i(kz - \omega t)}$ , подразумевающее определенную зависимость собственной частоты от волнового числа  $\omega = \omega(k)$ , не имеет места при наличии теплового разброса зарядов по скоростям. Точно так же, например, не получилось бы решения в виде  $e^{-i\omega t}$ , если бы скорость заряда была определенной, но возмущение имело бы вид волнового пакета  $f(z) = \int f_k e^{ikz} dk$  ( $f_k \neq \delta(k - k')$ ). Формально это ясно и из дисперсионного уравнения. Это уравнение трансцендентное и имеет неограниченное число корней. Найденный корень (5. 23) выделяется тем, что имеет минимальную мнимую часть.

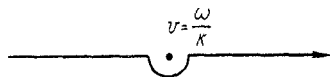


Рис. 13.

Строгое решение задачи о собственных колебаниях плазмы, проведенное ниже (§ 7), показывает, что решение  $e^{i(kz - \omega t)}$  осуществляется асимптотически (для больших  $t$ ). При этом оказывается, что входящий в дисперсионное уравнение интеграл следует вычислить именно так, как это сделано выше, т. е. предполагать, что в знаменателе подынтегрального выражения  $\omega$  вещественна и имеется всегда малая положительная мнимая часть  $v > 0$ , которую потом можно устремить к нулю. Если с самого начала считать, что  $v = 0$ , то такое правило вычисления означает, что при интегрировании по  $v$  полюс  $v = \frac{\omega}{k}$  необходимо при  $k > 0$  обходить снизу (рис. 13). Это правило вычисления называется «правилом обхода Ландау». Обоснование этого правила будет дано в § 7. Предварительно рассмотрим некоторые общие соотношения электродинамики сред, обладающих пространственной дисперсией, т. е. сред, у которых тензор  $\epsilon_{\alpha\beta}$  зависит от  $k$ .

### § 6. Уравнения Максвелла в анизотропной среде с пространственной дисперсией

В случае немагнитной среды ( $\mu = 1$ ) уравнения Максвелла можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} \text{rot } \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}(\mathbf{E}) &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_{\text{стор}}; \\ \text{rot } \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0; \\ \text{div } \mathbf{E} - 4\pi \rho(\mathbf{E}) &= 4\pi \rho_{\text{стор}}; \\ \text{div } \mathbf{B} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6. 1)$$

В первом уравнении выделена часть плотности тока  $\mathbf{j}(\mathbf{E})$ , вызванная электрическим полем волны. Под сторонней плотностью тока  $\mathbf{j}_{\text{стор}}$  понимается плотность тока, не зависящая от  $\mathbf{E}$ , например ток в проводниках, помещенных в плазму, или ток, создаваемый отдельным зарядом (при рассмотрении поля, создаваемого этим зарядом), и т. п. Соответствующее разделение сделано и в плотности зарядов.

Общая связь плотности тока  $\mathbf{j}(\mathbf{E})$ , вызванного электромагнитным полем в однородной среде, находящейся в стационарных условиях, может быть записана (в рамках линейности уравнений Максвелла) в виде линейного функционала

$$j_{\alpha}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^t dt' \int_{\mathbf{r}'} \sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') E_{\beta}(\mathbf{r}', t') d\mathbf{r}'. \quad (6.2)$$

Здесь и всюду далее предполагается, что при  $t = -\infty$  электромагнитное поле в среде отсутствовало. Формула (6.2) выражает тот факт, что ток в точке  $\mathbf{r}$  в момент  $t$  зависит от электрического поля, которое было в точке  $\mathbf{r}'$  в предшествующие моменты времени  $t' < t$ . Такая связь между  $\mathbf{j}$  и  $\mathbf{E}$  проистекает из-за того, что вклад в плотность тока  $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$  дают те заряды, которые за промежутки времени  $t - t'$  передадут воздействие электромагнитного поля из точки  $\mathbf{r}'$  в  $\mathbf{r}$ . В простейшем случае пренебрежения взаимодействием между зарядами этот перенос воздействия осуществляется перемещением заряда из  $\mathbf{r}'$  в  $\mathbf{r}$  вследствие теплового движения. Так, для плазмы без магнитного поля вклад в ток дают заряды, перемещающиеся со скоростью  $\mathbf{v}_0 = (\mathbf{r} - \mathbf{r}')/(t - t')$  из  $\mathbf{r}'$  в  $\mathbf{r}$ . Таким образом, ядро  $\sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t')$  зависит от закона движения зарядов в рассматриваемой среде. Эта зависимость имеет наиболее простой вид в случае среды, находящейся в статистическом равновесии, когда функция распределения зарядов имеет вид

$$D_0(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0) d\mathbf{q}_0 d\mathbf{p}_0 = \text{const} \cdot e^{-\varepsilon(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0)/T} d\mathbf{q}_0 d\mathbf{p}_0 \quad (6.3)$$

( $\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0$  — совокупность координат и импульсов всех  $N$  зарядов, находящихся в рассматриваемом объеме). При наличии электромагнитного поля это распределение искажается:

$$D(t) = D_0 + D_1(t), \quad (6.4)$$

причем  $D_1(t)$  подчиняется уравнению

$$\begin{aligned} \frac{\partial D_1}{\partial t} + [H_0 D_1] - \sum_{i=1}^N \frac{e_i}{m_i} \left\{ \mathbf{E}(\mathbf{r}_i, t) + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_i \mathbf{B}(\mathbf{r}_i, t)] \right\} \frac{\partial D_0}{\partial \mathbf{p}_i} = \\ = \sum_{i=1}^N \frac{e_i \mathbf{v}_i \mathbf{E}(\mathbf{r}_i, t)}{T} D_0, \end{aligned} \quad (6.5)$$

где  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  — среднее электрическое и магнитное поля, определяемые уравнениями (6.1),  $H_0$  — гамильтониан системы зарядов

в отсутствие электромагнитной волны\*. Перейдем от переменных  $\mathbf{r}_i, \mathbf{p}_i, t$  к переменным  $\mathbf{r}_{0i}, \mathbf{r}_{0i}, t$ , определив связь между ними из закона движения зарядов в отсутствие волны:

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(\mathbf{r}_{0i}, t); \quad \mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i(\mathbf{v}_{0i}, t). \quad (6.6)$$

Тогда уравнение (6.5) примет вид

$$\frac{\partial D_1}{\partial t} = \sum_{i=1}^N \frac{e_i \mathbf{v}_i(t) \mathbf{E}(\mathbf{r}_i(t), t)}{T} D_0 = \frac{D_0}{T} \int_V \mathbf{j}^M(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}(\mathbf{r}', t) d\mathbf{r}', \quad (6.7)$$

где  $\mathbf{j}^M$  — микроскопическая плотность тока:

$$\mathbf{j}^M(\mathbf{r}, t) = \sum_{i=1}^N e_i \mathbf{v}_i(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)). \quad (6.8)$$

Таким образом,

$$D_1 = \frac{D_0}{T} \int_{-\infty}^t dt' \int_V \mathbf{j}_\beta^M(\mathbf{r}', t') E_\beta(\mathbf{r}', t') d\mathbf{r}'. \quad (6.9)$$

Среднюю плотность тока мы получим, умножив  $\mathbf{j}^M(\mathbf{r}, t)$  на  $D_1$  и проинтегрировав по координатам и скоростям всех зарядов:

$$j_\alpha(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^t dt' \int_V \overline{j_\alpha^M(\mathbf{r}, t) j_\beta^M(\mathbf{r}', t')} \cdot E_\beta(\mathbf{r}', t') d\mathbf{r}'. \quad (6.10)$$

Здесь черта означает усреднение по равновесному распределению  $D_0$ .

Сравнение выражений (6.10) и (6.2) для плотности тока показывает, что ядро  $\sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t')$  связано с функцией корреляции токов

$$G_{\alpha\beta}(\mathbf{R}, \tau) = \overline{j_\alpha^M(\mathbf{r}, t) j_\beta^M(\mathbf{r}', t')}; \quad \mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}', \quad \tau = t - t' \quad (6.11)$$

простым соотношением

$$\sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{R}, \tau) = \frac{1}{T} G_{\alpha\beta}(\mathbf{R}, \tau). \quad (6.12)$$

Функция  $\sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{R}, \tau)$  по своему смыслу определена только при  $\tau > 0$ . Но ее можно продолжить (произвольным образом) и в область  $\tau < 0$ . Определим ее при  $\tau < 0$  следующим образом:

$$\sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{R}, -\tau) = \sigma_{\beta\alpha}(-\mathbf{R}, \tau), \quad \text{или} \quad \sigma_{\alpha\beta}(-\mathbf{R}, -\tau) = \sigma_{\beta\alpha}(\mathbf{R}, \tau). \quad (6.13)$$

Такое продолжение естественно получается, если формулу (6.12) распространить на область  $\tau < 0$  из очевидного свойства

\* Имея в виду получение соотношений между основными электромагнитными характеристиками среды максимально наглядным способом, мы не останавливаемся здесь на уточнении смысла  $H_0$ . В случае плазмы все используемые в этом параграфе соотношения можно получить регулярным способом (см. приложение III).

$G_{\alpha\beta}(\mathbf{R}, \tau) = G_{\beta\alpha}(-\mathbf{R}, -\tau)$ . Соотношения (6. 13) можно однако использовать и в случае, когда формула (6. 12) вовсе неприменима (в неравновесной среде).

Как видно, уравнения Максвелла в общем случае являются интегро-дифференциальными, и их решение представляет большие затруднения. Одним из рациональных методов решения этих уравнений в случае однородной среды является метод Фурье — разложение всех величин по плоским волнам. Остановимся на получении соотношений между фурье-компонентами величин  $\mathbf{j}$  и  $\mathbf{E}$ ,  $\sigma_{\alpha\beta}$  и  $G_{\alpha\beta}$ .

При разложении по плоским волнам фурье-компоненты будем обозначать той же буквой, изменяя только аргумент:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \int \mathbf{j}(\mathbf{k}, \omega) e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} d\mathbf{k} d\omega; \quad (6. 14)$$

$$\mathbf{j}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} d\mathbf{r} dt; \quad (6. 14a)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \int \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} d\mathbf{k} d\omega \text{ и т. д.} \quad (6. 15)$$

Интегрирование по  $k_x, k_y, k_z, \omega, x, y, z$  и  $t$ , если не отмечено особо, производится от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Подставляя электрическое поле (6. 15) в выражение (6. 2), связывающее  $\mathbf{j}$  и  $\mathbf{E}$ , и вводя вместо  $\mathbf{r}', t'$  новые переменные  $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$  и  $\tau = t - t'$ , получим выражение для  $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$  в виде разложения (6. 14), причем

$$j_\alpha(\mathbf{k}, \omega) = \sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega) E_\beta(\mathbf{k}, \omega); \quad (6. 16)$$

$$\sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega) = \int_0^\infty d\tau \int \sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{R}, \tau) e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{R} - \omega\tau)} d\mathbf{R}. \quad (6. 17)$$

Обратим внимание на то, что интеграл по  $\tau$  здесь берется в пределах от 0 до  $\infty$  (а не от  $-\infty$  до  $+\infty$ ). Это обстоятельство непосредственно связано с причинной зависимостью  $\mathbf{j}$  от  $\mathbf{E}$ , выражаемой тем фактом, что в формуле (6. 2) интегрирование производится только по предшествующим моментам времени.

Представим тензор  $\sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega)$  в виде суммы эрмитовской и антиэрмитовской частей:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta} &= \sigma'_{\alpha\beta} + i\sigma''_{\alpha\beta}; \\ \sigma'_{\alpha\beta} &= \frac{\sigma_{\alpha\beta} + \sigma_{\beta\alpha}^*}{2}; \quad i\sigma''_{\alpha\beta} = \frac{\sigma_{\alpha\beta} - \sigma_{\beta\alpha}^*}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (6. 18)$$

Делая простые преобразования переменных интегрирования и воспользовавшись свойством (6. 13), из уравнения (6. 17) находим

$$\sigma'_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{2} \int \sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{R}, \tau) e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{R} - \omega\tau)} d\mathbf{R} d\tau; \quad (6. 19)$$

$$\sigma''_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{2i} \int \sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{R}, \tau) \text{Sgn } \tau \cdot e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{R} - \omega\tau)} d\mathbf{R} d\tau. \quad (6. 20)$$



В интегралах (6. 19) и (6. 20) интегрирование по  $\tau$  производится в пределах от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Второй интеграл, фактически представляющий собой разность двух интегралов с пределами от 0 до  $+\infty$  и от  $-\infty$  до 0 записан в том же виде, что и первый, с помощью разрывной функции

$$\text{Sgn } \tau = \begin{cases} 1, & \tau > 0; \\ -1, & \tau < 0. \end{cases} \quad (6. 21)$$

В дальнейшем потребуется фурье-компонента этой функции.

Найдем сначала фурье-компоненту функции  $\text{Sgn } \tau \cdot e^{-\nu|\tau|}$ , а затем устремим  $\nu$  к нулю. Имеем

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Sgn } \tau \cdot e^{-\nu|\tau|} e^{ix\tau} d\tau = \frac{i}{\pi} \frac{x}{\lambda^2 + \nu^2}. \quad (6. 22)$$

Функция

$$\frac{P}{x} = \lim_{\nu \rightarrow 0} \frac{x}{\lambda^2 + \nu^2}, \quad (6. 23)$$

называемая главным значением  $1/x$ , ведет себя как  $1/x$  всюду, за исключением точки  $x = 0$ , где она обращается в нуль. Если эта функция стоит под знаком интеграла, то интеграл берется в смысле «главного значения»:

$$\int_a^b f(x) \frac{P}{x} dx \equiv \int_a^b \frac{f(x)}{x} dx. \quad (6. 24)$$

Из соотношения (6. 22) имеем

$$\frac{i}{\pi} \frac{P}{x} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Sgn } \tau \cdot e^{ix\tau} d\tau, \quad (6. 25)$$

так что

$$\text{Sgn } \tau = \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix\tau}}{x} dx. \quad (6. 26)$$

Формулы (6. 19) и (6. 20) дают выражение эрмитовской и антиэрмитовской частей тензора  $\sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega)$  через одну и ту же функцию  $\sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{R}, \tau)$ . Эти же формулы позволяют найти и непосредственную связь  $\sigma'_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega)$  и  $\sigma''_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega)$  (формулы Крамерса). Действительно, производя обратное преобразование Фурье, из формул (6. 19) и (6. 20) соответственно находим:

$$\sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{R}, \tau) = \frac{2}{2\pi} \int \sigma'_{\alpha\beta}(\omega', \mathbf{k}') e^{i(\mathbf{k}'\mathbf{R} - \omega'\tau)} d\mathbf{k}' d\omega'; \quad (6. 19a)$$

$$\sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{R}, \tau) = \frac{2}{2\pi} \int i\sigma''_{\alpha\beta}(\omega', \mathbf{k}') \text{Sgn } \tau \cdot e^{i(\mathbf{k}'\mathbf{R} - \omega'\tau)} d\mathbf{k}' d\omega'. \quad (6. 20a)$$

Подставляя выражение (6. 19а) в (6. 20), а выражение (6. 20а) в (6. 19) и используя формулы (6. 25) и (6. 24), получаем формулы Крамера \* для тензора  $\sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega)$ :

$$\sigma''_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{\pi} \int \frac{\sigma'_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega')}{\omega - \omega'} d\omega'; \quad (6. 27)$$

$$\sigma'_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega) = -\frac{1}{\pi} \int \frac{\sigma''_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega')}{\omega - \omega'} d\omega'. \quad (6. 28)$$

При решении уравнений Максвелла, как отмечалось в § 1, удобно включать плотность тока  $\mathbf{j}(\mathbf{E})$  в электрическую индукцию и пользоваться тензором электрической проницаемости

$$\epsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega) = \delta_{\alpha\beta} + i \frac{4\pi\sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega)}{\omega}. \quad (6. 29)$$

Этот тензор связывает векторы  $\mathbf{D}(\mathbf{k}, \omega)$  с  $\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega)$ :

$$\mathbf{D}(\mathbf{k}, \omega) = \epsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega) E_{\beta}(\mathbf{k}, \omega). \quad (6. 30)$$

Эрмитовская и антиэрмитовская части тензоров  $\epsilon_{\alpha\beta}$  и  $\sigma_{\alpha\beta}$  связаны соотношениями:

$$\epsilon'_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} - \frac{4\pi\sigma''_{\alpha\beta}}{\omega}; \quad i\epsilon''_{\alpha\beta} = i \frac{4\pi\sigma'_{\alpha\beta}}{\omega}. \quad (6. 31)$$

Заметим, что поскольку  $\sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{R}, \tau)$  — вещественная функция, то, как это видно из уравнения (6. 17),  $\sigma_{\alpha\beta}^*(\mathbf{k}, \omega) = \sigma_{\alpha\beta}(-\mathbf{k}, -\omega)$  и, следовательно,

$$\epsilon_{\alpha\beta}^*(\mathbf{k}, \omega) = \epsilon_{\alpha\beta}(-\mathbf{k}, -\omega). \quad (6. 32)$$

Воспользуемся методом Фурье для нахождения электромагнитного поля в плазме по заданным токам. Уравнения Максвелла (6. 1) для фурье-компонент превращаются в алгебраическую систему уравнений, причем дифференциальные операции заменяются следующими алгебраическими:

$$\operatorname{div} \mathbf{A} \rightarrow i(\mathbf{k}\mathbf{A}); \quad \operatorname{rot} \mathbf{A} \rightarrow i[\mathbf{k}\mathbf{A}]; \quad \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \rightarrow -i\omega\mathbf{A}. \quad (6. 33)$$

Первые два уравнения Максвелла принимают, таким образом, вид

$$i[\mathbf{k}\mathbf{V}] + i \frac{\omega}{c} \mathbf{D} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_{\text{стор}}; \quad (6. 34)$$

$$i[\mathbf{k}\mathbf{E}] - i \frac{\omega}{c} \mathbf{B} = 0.$$

\* Заметим, что в исходной формуле (6. 2) интегрирование производится фактически по «релятивистскому конусу»  $R \leq c\tau$ . Явный учет этого ограничения области интегрирования приводит к дополнительным связям в формулах Крамера, установленным М. А. Леонтовичем [39]. При использовании конкретного значения  $\sigma_{\alpha\beta}(R, \tau)$  учет релятивизма производится автоматически, поскольку  $\sigma_{\alpha\beta}(R, \tau) = 0$  при  $R > c\tau$ . [сравните, например, формулы (6. 12) и (8. 12)].

Вторые два уравнения являются следствием этих двух, если учесть, что  $\operatorname{div} \mathbf{j} = i\omega\rho$ .

Исключая  $\mathbf{V}$ , получаем систему уравнений

$$\left(k^2\delta_{\alpha\beta} - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{\alpha\beta} - k_\alpha k_\beta\right) E_\beta = \frac{4\pi i\omega}{c^2} j_\alpha^{\text{стор}} \quad (6.35)$$

(в дальнейшем индекс «стор» будем опускать).

В случае изотропной среды, когда тензор  $\varepsilon_{\alpha\beta}$  имеет вид

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon_\perp \left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2}\right) + \varepsilon_\parallel \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2}, \quad (6.36)$$

эта система может быть записана в векторной форме

$$\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_\perp\right) \mathbf{E}_\perp - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_\parallel \mathbf{E}_\parallel - \frac{4\pi i\omega}{c^2} \mathbf{j}, \quad (6.37)$$

где  $\mathbf{E}_\parallel = \frac{\mathbf{k}(\mathbf{kE})}{k^2}$  — компонента вектора  $\mathbf{E}$  вдоль  $\mathbf{k}$  (продольное поле), а  $\mathbf{E}_\perp = \frac{[\mathbf{k}|\mathbf{E}\mathbf{k}]}{k^2}$  — поперечное (относительно  $\mathbf{k}$ ) поле.

Из этого уравнения следует

$$\mathbf{E}_\parallel = -\frac{4\pi i}{\omega\varepsilon_\parallel} \mathbf{j}_\parallel(\mathbf{k}, \omega); \quad (6.38)$$

$$\mathbf{E}_\perp = \frac{4\pi i\omega}{c^2} \frac{\mathbf{j}_\perp(\mathbf{k}, \omega)}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_\perp}. \quad (6.39)$$

Полное поле  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  равно

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \int \frac{4\pi i}{\omega} \left\{ \frac{\frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{j}_\perp(\mathbf{k}, \omega)}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_\perp(\mathbf{k}, \omega)} - \frac{\mathbf{j}_\parallel(\mathbf{k}, \omega)}{\varepsilon_\parallel(\mathbf{k}, \omega)} \right\} e^{i(\mathbf{kR} - \omega t)} d\mathbf{k} d\omega. \quad (6.40)$$

Как видно, электрическое поле складывается из двух независимых частей. Первое слагаемое удовлетворяет условию  $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$ . Это поперечное поле. Второе слагаемое удовлетворяет условию  $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$ . Это продольное поле.

Рассмотрим теперь анизотропную среду. Для решения системы уравнений (6.35) воспользуемся методом нормальных колебаний [40, 41], в котором поле  $\mathbf{E}$  разлагается по «нормальным векторам поля», или векторам поляризации  $\mathbf{a}$ . Эти векторы поляризации определим как решение следующей системы однородных уравнений:

$$\{\varepsilon_l(\delta_{\alpha\beta} - n_\alpha n_\beta) - \varepsilon_{\alpha\beta}\} a_{\beta l} = 0; \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{k}}{k}, \quad (6.41)$$

где соответствующее вектору  $\mathbf{a}_l$  собственное значение  $\varepsilon_l$  ( $l = 1; 2$ ) определяется соотношением (1. 25а). Наряду с этой рассмотрим следующую вспомогательную систему уравнений для взаимных векторов  $\mathbf{b}^*$ :

$$\{\varepsilon_m (\delta_{\alpha\beta} - n_\alpha n_\beta) - \varepsilon_{\beta\alpha}\} b_{\beta m}^* = 0. \quad (6. 42)$$

(Векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  являются собственными функциями взаимно сопряженных операторов. Если  $\varepsilon_{\alpha\beta}$  — эрмитовская матрица ( $\varepsilon_{\alpha\beta}^* = \varepsilon_{\beta\alpha}$ ), то векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  совпадают). Умножая первое уравнение на  $b_{\alpha m}^*$ , а второе на  $a_{\alpha l}$  и переобозначая немые индексы суммирования во втором уравнении, получим

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_l (\delta_{\alpha\beta} - n_\alpha n_\beta) b_{\alpha m}^* a_{\beta l} - \varepsilon_{\alpha\beta} a_{\beta l} b_{\alpha m}^* &= 0; \\ \varepsilon_m (\delta_{\alpha\beta} - n_\alpha n_\beta) b_{\alpha m}^* a_{\beta l} - \varepsilon_{\alpha\beta} a_{\beta l} b_{\alpha m}^* &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6. 43)$$

Вычтем второе уравнение из первого:

$$(\varepsilon_l - \varepsilon_m) (\delta_{\alpha\beta} - n_\alpha n_\beta) b_{\alpha m}^* a_{\beta l} = 0. \quad (6. 44)$$

Отсюда следует, что при  $l \neq m$  множитель при  $(\varepsilon_l - \varepsilon_m)$  обращается в нуль. При  $l = m$  для анизотропной среды он не равен нулю и может быть приравнен единице. Этим условием определяется нормировка векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ .

Итак, векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  удовлетворяют следующим условиям:  
1) условию ортонормировки\*:

$$(\delta_{\alpha\beta} - n_\alpha n_\beta) b_{\alpha m}^* a_{\beta l} = \delta_{lm}; \quad (6. 45)$$

2) из уравнений (6. 43) с учетом условия (6. 45) следует эквивалентное соотношение

$$\varepsilon_{\alpha\beta} a_{\beta l} b_{\alpha m}^* = \varepsilon_l \delta_{lm}. \quad (6. 46)$$

Решение неоднородной системы уравнений (6. 35) представим теперь в виде

$$\mathbf{E} = \sum_{l=1}^2 E_l \mathbf{a}_l, \quad (6. 47)$$

---

\* Условием (6. 45) нормируется поперечная компонента вектора поля. В случае изотропной среды, когда имеется независимое продольное поле, выражение  $(\delta_{\alpha\beta} - n_\alpha n_\beta) b_{\alpha n}^* a_{\beta l} = \mathbf{a}_l \mathbf{b}_n^* - (\mathbf{n} \mathbf{a}_l) (\mathbf{n} \mathbf{b}_n^*)$  тождественно равно нулю для продольного поля, и указанный способ нормировки не является удовлетворительным. Вместо нормировки поперечных компонент можно использовать другие нормировки, например, нормировку длины вектора поля (см. задачу 1 к § 6).

где  $E_l$  — амплитуды, подлежащие определению. Подставляем выражение (6. 47) в уравнения (6. 35):

$$\left[ \frac{k^2 c^2}{\omega^2} (\delta_{\alpha\beta} - n_\alpha n_\beta) - \varepsilon_{\alpha\beta} \right] \sum_{l=1}^2 E_l a_{\beta l} = \frac{4\pi i}{\omega} j_\alpha(\mathbf{k}, \omega). \quad (6. 48)$$

Умножая это уравнение на  $b_{\alpha m}^*$  и учитывая условия ортонормировки, получим

$$\left( \frac{k^2 c^2}{\omega^2} - \varepsilon_l \right) E_l = \frac{4\pi i}{\omega} (j b_l^*). \quad (6. 49)$$

Из выражений (6. 49) и (6. 47) для фурье-компоненты электрического поля получаем выражение

$$\mathbf{E}(\mathbf{k}; \omega) = \sum_{l=1}^2 \frac{4\pi i}{\omega} \cdot \frac{a_l (j b_l^*)}{\frac{k^2 c^2}{\omega^2} - \varepsilon_l(\mathbf{k}, \omega)}. \quad (6. 50)$$

Наконец,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_{l=1}^2 \int \frac{4\pi i}{\omega} \cdot \frac{a_l (j b_l^*)}{\frac{k^2 c^2}{\omega^2} - \varepsilon_l(\mathbf{k}, \omega)} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} d\mathbf{k} d\omega. \quad (6. 51)$$

Вектор поляризации в системе координат с осью  $z$ , направленной вдоль  $\mathbf{k}$ , был найден в § 1 [формула (1. 27)]:

$$\mathbf{a} = a_y \{i\alpha_x, 1, i\alpha_z\}, \quad (6. 52)$$

где  $\alpha_x$  и  $\alpha_z$  удовлетворяют уравнениям (1. 28) и (1. 31). Аналогичным образом можно найти вектор  $\mathbf{b}^*$ :

$$\mathbf{b}^* = a_y \{-i\alpha_x, 1, -i\alpha_z\}. \quad (6. 53)$$

(Здесь положено  $a_y = a_y^* = b_y$  так, чтобы в случае эрмитовского тензора  $\varepsilon_{\alpha\beta}$  векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  совпадали не только по направлению, но и по абсолютной величине.) Условие ортонормировки имеет вид

$$a_{yl} a_{ym}^* (1 + \alpha_{xl} \alpha_{xm}) = \delta_{lm}. \quad (6. 54)$$

Согласно выражению (1. 32),  $\alpha_{x1} \alpha_{x2} = -1$ , так что при  $l \neq m$  это условие действительно выполняется. При  $l = m$  получаем

$$a_y = \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha_x^2}}. \quad (6. 55)$$

В системе координат, для которой обычно вычисляется тензор  $\varepsilon_{\alpha\beta}$  (магнитное поле направлено вдоль оси  $z$ , вектор  $\mathbf{k}$  расположен в плоскости  $xz$  и составляет угол  $\theta$  с вектором  $\mathbf{B}_0$ ), компоненты

вектора поляризации определяются по формулам преобразования координат и равны

$$\begin{aligned} a_{x0} &= \frac{i}{\sqrt{1 + \alpha_x^2}} \alpha_{x0}; & a_{y0} &= \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha_x^2}}; \\ a_{z0} &= \frac{i}{\sqrt{1 + \alpha_x^2}} \alpha_{z0}, \end{aligned} \quad (6.56)$$

где

$$\alpha_{x0} = \alpha_x \cos \theta + \alpha_z \sin \theta; \quad \alpha_{z0} = \alpha_z \cos \theta - \alpha_x \sin \theta. \quad (6.57)$$

Выражения  $\alpha_x$ ,  $\alpha_z$ ,  $\alpha_{x0}$  и  $\alpha_{z0}$  через компоненты тензора  $\epsilon_{\alpha\beta}^0$  были приведены в § 1 [формулы (1.35)—(1.38)].

Поскольку в интеграле (6.51) по  $\mathbf{k}$  производится интегрирование, для вычисления  $\mathbf{E}$  необходимо иметь вектор поляризации в фиксированной системе координат с произвольно направленным вектором  $\mathbf{k}$ . Пусть вектор  $\mathbf{B}_0$  направлен по оси  $z$ , а вектор  $\mathbf{k}$  имеет компоненты

$$\mathbf{k} = \{k_{\perp} \cos \kappa, k_{\perp} \sin \kappa, k_z\}. \quad (6.58)$$

Компоненты вектора поляризации в этой системе координат находятся по правилам преобразования векторов:

$$a_x(\kappa) = a_{x0} \cos \kappa - a_{y0} \sin \kappa, \quad a_y(\kappa) = a_{x0} \sin \kappa + a_{y0} \cos \kappa. \quad (6.59)$$

**Задача 1.** Вывести формулу для определения поля  $\mathbf{E}$  по заданной плотности тока  $\mathbf{j}$ , взяв за нормальные векторы поля векторы  $\tilde{\mathbf{a}}$  и  $\tilde{\mathbf{b}}$ , у которых нормированы не проекции, а полная длина ( $\tilde{\mathbf{a}}_l \tilde{\mathbf{b}}_m^* = \delta_{lm}$ ).

**Решение.** Нетрудно видеть, что векторы  $\tilde{\mathbf{a}}$  и  $\tilde{\mathbf{b}}^*$  вместо уравнений (6.41) и (6.42) должны удовлетворять теперь следующим уравнениям:

$$\left( \tilde{\epsilon}_l \delta_{\alpha\beta} - \frac{k^2 c^2}{\omega^2} n_{\alpha} n_{\beta} - \epsilon_{\alpha\beta} \right) \tilde{a}_{\beta l} = 0; \quad (1)$$

$$\left( \tilde{\epsilon}_m \delta_{\alpha\beta} - \frac{k^2 c^2}{\omega^2} n_{\alpha} n_{\beta} - \epsilon_{\beta\alpha} \right) \tilde{b}_{\beta m}^* = 0. \quad (2)$$

Действительно, умножая уравнение (1) на  $b_{\alpha m}^*$ , а уравнение (2) на  $\tilde{a}_{\alpha l}$  и вычитая затем уравнение (2) из уравнения (1), получим  $\delta_{\alpha\beta} (\tilde{\epsilon}_l - \tilde{\epsilon}_m) \tilde{a}_{\beta l} \tilde{b}_{m\alpha}^* = 0$ , т. е.

$$\delta_{\alpha\beta} \tilde{a}_{\beta l} \tilde{b}_{m\alpha}^* = \delta_{lm}. \quad (3)$$

При  $l = m$  имеем

$$\tilde{\mathbf{a}} \tilde{\mathbf{b}}^* = 1. \quad (3a)$$

Из уравнения (1) после умножения на  $b_{\alpha m}^*$  с учетом соотношения (3) следует

$$\tilde{\epsilon}_l = \frac{k^2 c^2}{\omega^2} (\tilde{n}_{\alpha l}) (\tilde{n}_{\beta l}^*) + \epsilon_{\alpha\beta} a_{\beta l} b_{l\alpha}^*. \quad (4)$$

При фиксированных  $k$  и  $\omega$  система (1) имеет в качестве решения три собственных вектора ( $l = 1, 2, 3$ ), соответствующих двум «квазипоперечным» и одной «квазипродольной» поляризациям. Представляя  $\mathbf{E}$  в виде суммы  $\mathbf{E} = \sum_{l=1}^3 E_l \mathbf{a}_l$  и используя выражения (3) и (4), по аналогии с выражением (6. 51) найдем

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_{l=1}^3 \int \frac{4\pi i}{\omega} \cdot \frac{\tilde{\mathbf{a}}_l(\tilde{j}\tilde{\mathbf{b}}_l^*)}{\frac{k^2 c^2}{\omega^2} - \tilde{\varepsilon}_l(k, \omega)} e^{i(k\mathbf{r} - \omega t)} d\mathbf{k} d\omega. \quad (5)$$

По этой формуле легко прослеживается переход к изотропной среде, когда уравнение (1) имеет вид

$$(\tilde{\varepsilon}_l - \varepsilon_{\perp}) \tilde{\mathbf{a}}_{\perp} + \left( \tilde{\varepsilon}_l - \frac{k^2 c^2}{\omega^2} - \varepsilon_{\parallel} \right) \tilde{\mathbf{a}}_{\parallel} = 0. \quad (6)$$

Для продольного поля, в частности, учитывая, что согласно уравнению (6)  $\tilde{\varepsilon}_{\parallel} = \frac{k^2 c^2}{\omega^2} + \varepsilon_{\parallel}$ , а согласно уравнению (3а)  $\tilde{\mathbf{a}}_{\parallel} \tilde{\mathbf{b}}_{\parallel}^* = 1$ , получаем

$$\mathbf{E}_{\parallel}(\mathbf{r}, t) = - \int \frac{4\pi i}{\omega} \cdot \frac{j_{\parallel}}{\varepsilon_{\parallel}} e^{i(k\mathbf{r} - \omega t)} d\mathbf{k} d\omega,$$

что совпадает с выражением (6. 40).

При нормировке (3) величины  $\tilde{\varepsilon}_l$ ,  $\tilde{\mathbf{a}}_l$  и  $\tilde{\mathbf{b}}_l^*$  даже без учета пространственной дисперсии зависят от  $k$ , поскольку фактор  $k^2 c^2 / \omega^2$  явно входит в уравнение (1). Поэтому в расчетах формула (5) оказывается менее удобной, чем формула (6. 51).

**Задача 2.** Найти  $\tilde{\varepsilon}_l$  (см. предыдущую задачу) для продольного ( $\theta = 0$ ) и поперечного ( $\theta = \frac{\pi}{2}$ ) распространения волны.

**Решение.** При продольном распространении ( $n_x = n_y = 0$ ,  $n_z = 1$ ) система (1) имеет вид

$$\left. \begin{aligned} (\tilde{\varepsilon} - \varepsilon_1) \tilde{a}_x - i g \tilde{a}_y &= 0; \\ i g \tilde{a}_x + (\tilde{\varepsilon} - \varepsilon_1) \tilde{a}_y &= 0; \\ (\tilde{\varepsilon} - N^2 - \eta) \tilde{a}_z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Условие обращения в нуль детерминанта дает

$$\tilde{\varepsilon}_{1,2} = \varepsilon_1 \pm g; \quad \tilde{\varepsilon}_3 = \frac{k^2 c^2}{\omega^2} + \eta. \quad (2)$$

При поперечном распространении ( $n_x = 1$ ;  $n_y = n_z = 0$ ;  $\mathbf{B} = B_0 \{0, 0, 1\}$ ) имеем:

$$\left. \begin{aligned} \left( \tilde{\varepsilon} - \frac{k^2 c^2}{\omega^2} - \varepsilon_1 \right) a_x - i g a_y &= 0; \\ i g a_x + (\tilde{\varepsilon} - \varepsilon_2) a_y &= 0; \\ (\tilde{\varepsilon} - \eta) a_z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Отсюда

$$\tilde{\varepsilon}_{1,2} = \frac{\frac{k^2 c^2}{\omega^2} + \varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} \pm \sqrt{\frac{\left(\frac{k^2 c^2}{\omega^2} + \varepsilon_1 - \varepsilon_2\right)^2}{4} + g^2}; \quad (4)$$

$$\tilde{\varepsilon}_3 = \eta. \quad (5)$$

Из уравнения  $\frac{k^2 c^2}{\omega^2} = \tilde{\varepsilon}_3 = \eta$  определяется показатель преломления обыкновенной (поперечной) волны. Уравнение  $\frac{k^2 c^2}{\omega^2} = \tilde{\varepsilon}_{1,2}$  определяет показатели преломления необыкновенной и «плазменной» волны. Нетрудно видеть, что это уравнение сводится к следующим:

$$1) \frac{k^2 c^2}{\omega^2} = \varepsilon_2 - \frac{g^2}{\varepsilon_1};$$

$$2) \frac{k^2 c^2}{\omega^2} \rightarrow \infty; \varepsilon_{11} = 0.$$

Первое из этих уравнений определяет «необыкновенную», а второе — «плазменную» волну.

### § 7. Задача о собственных колебаниях плазмы и о распространении электромагнитных волн в плазме

Пусть в плазме в момент времени  $t = 0$  задано электрическое поле  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ , причем  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0$  при  $t < 0$ . Возникает вопрос, какова дальнейшая судьба электрического поля? Для выяснения этого вопроса необходимо решить уравнение Максвелла с заданным начальным условием. Для решения поставленной задачи удобен метод Лапласа, автоматически учитывающий условие  $\mathbf{E}(t) = 0$  при  $t < 0$ . В методе Лапласа, однако, вместо частоты  $\omega$  фигурирует переменная  $p = -i\omega$ . Поскольку тензор  $\varepsilon_{\alpha\beta}$  обычно рассматривается как функция от  $\omega$ , то желательно решить задачу с начальным условием методом Фурье. В методе Фурье начальное условие можно учесть включением в исходные уравнения Максвелла соответствующего стороннего тока. Нетрудно видеть, что плотность этого тока равна

$$\mathbf{j}_{\text{стор}} = -\frac{1}{4\pi} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \delta(t). \quad (7.1)$$

Действительно, предположим, что других источников поля нет, тогда  $\mathbf{E} = 0$  при  $t < 0$ . Интегрируя далее уравнение

$$\text{rot } \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}(\mathbf{E}) + \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_{\text{стор}} \quad (7.2)$$

по  $t$  от  $t = -\varepsilon$  до  $t = +\varepsilon$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , получим

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)_{t=+0} = -4\pi \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \mathbf{j}_{\text{стор}} dt = \mathbf{E}(\mathbf{r}). \quad (7.3)$$

Таким образом, решение неоднородных уравнений Максвелла с источником (7.1) удовлетворяет заданному начальному условию.



Фурье-компонента от  $\mathbf{j}_{\text{стор}}(\mathbf{r}, t)$  равна

$$\mathbf{j}(\mathbf{k}', \omega) = -\frac{1}{4\pi(2\pi)^4} \int \mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r}. \quad (7.4)$$

Для исследования колебаний достаточно рассмотреть поле вида

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 e^{i\mathbf{k}z}. \quad (7.5)$$

Соответствующая фурье-компонента плотности стороннего тока равна

$$\mathbf{j}(\mathbf{k}', \omega) = -\frac{1}{8\pi^2} \mathbf{E}_0 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta(k'_\perp). \quad (7.6)$$

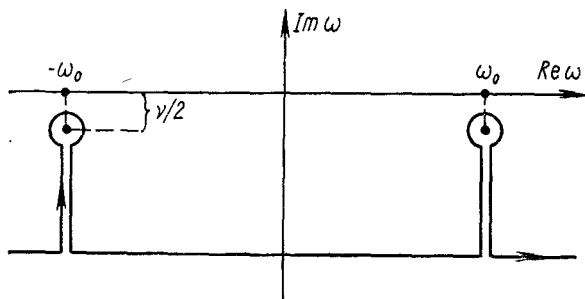


Рис. 14.

Подставляя это значение  $\mathbf{j}(\mathbf{k}', \omega)$  в решение уравнений Максвелла (6.40) и (6.51), получим выражение для поля в виде интеграла по  $d\omega$ . В случае изотропной плазмы

$$\mathbf{E}_\parallel(z, t) = i \frac{E_\parallel^0}{2\pi} e^{ikz} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega t}}{\omega \varepsilon_\parallel(k, \omega)} d\omega; \quad (7.7)$$

$$\mathbf{E}_\perp(z, t) = -i \frac{E_\perp^0}{2\pi} e^{ikz} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega e^{-i\omega t}}{k^2 c^2 - \omega^2 \varepsilon_\perp(k, \omega)} d\omega. \quad (7.8)$$

В анизотропной среде электромагнитное поле определяется по начальным условиям согласно выражениям (6.51) и (7.6) следующей формулой:

$$\mathbf{E}(z, t) = -\frac{i}{2\pi} e^{ikz} \sum_{l=1}^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega a_l (E_0 b_l^*)}{k^2 c^2 - \omega^2 \varepsilon_\perp(k, \omega)} d\omega. \quad (7.9)$$

В качестве примера вычисления интегралов этого типа получим

$\mathbf{E}_\parallel(t)$  в отсутствие теплового движения, когда  $\varepsilon = 1 - \frac{\omega_{0e}^2}{\omega(\omega + i\nu)}$  (в дальнейшем положим  $\nu = 0$ ). Интеграл (7.7) легко вычисляется путем перехода в плоскость комплексного переменного  $\omega$  (рис. 14).

В этой плоскости подынтегральное выражение имеет два полюса, равные при  $v \ll \omega_0 e$ :

$$\omega = \pm \omega_0 e - i \frac{v}{2}. \quad (7.10)$$

При  $t > 0$  сместим путь интегрирования далеко вниз. Тогда интегрирование сведется к обходу полюсов, так как интеграл по горизонтальному участку  $\text{Im } \omega = -\infty$  равен нулю. Итак, при  $v \rightarrow 0$  получим, учитывая, что полюса обходятся по часовой стрелке,

$$\begin{aligned} E_{\parallel}(t) &= i \frac{E_0}{2\pi} e^{ikz} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\omega - \omega_0 e + i \frac{v}{2}} + \frac{1}{\omega + \omega_0 e + i \frac{v}{2}} \right\} e^{-i\omega t} d\omega = \\ &= E_0 e^{ikz} \cos \omega_0 e t e^{-\frac{v}{2} t}. \end{aligned} \quad (7.11)$$

При  $t < 0$  путь интегрирования сместим вверх. Так как полюсов сверху нет, то интеграл сведется к интегралу по горизонтальному пути  $\text{Im } \omega = +\infty$ . Благодаря подынтегральному множителю  $e^{-i\omega t}$  интеграл при  $t < 0$  обращается в нуль, т. е. решение действительно удовлетворяет начальному условию.

При учете теплового движения  $\varepsilon(\mathbf{k}, \omega)$  является трансцендентной функцией. Подынтегральное выражение может иметь неограниченное число полюсов, в том числе существенно особые точки и точки ветвления. Однако для сравнительно больших промежутков времени интеграл сведется к вычету относительно одного полюса с минимальной по абсолютной величине мнимой частью.

Для среды, не находящейся в статистическом равновесии, полюса подынтегрального выражения могут лежать и в верхней полуплоскости комплексного переменного  $\omega$ . В этом случае электромагнитное поле оказывается экспоненциально нарастающим во времени, так что разложение Фурье становится неприменимым. Но и при этом можно рассмотреть аналитическое продолжение интеграла в область, где метод Фурье неприменим. Правило вычисления интеграла при наличии полюсов, лежащих в верхней полуплоскости, вытекает из условия, что при  $t < 0$  электрическое поле равно нулю. Из этого условия следует, что путь интегрирования должен всегда обходить полюса сверху (рис. 15). Действительно, в этом случае, смещая его в область  $\text{Im } \omega = +\infty$ , получим, как и в разобранный примере,  $E = 0$  при  $t < 0$ . Заметим, что при решении задачи методом Лапласа поле  $E(t)$  выражается интегралом вдоль мнимой оси в плоскости комплексного переменного  $p = -i\omega$ . При этом путь интегрирования должен обходить все полюса справа, что соответствует, как нетрудно убедиться, указанному выше правилу обхода полюсов сверху в плоскости комплексного переменного  $\omega$ ,

Из сказанного ясно, что задача о собственных колебаниях сводится к нахождению полюсов подынтегральных выражений, т. е. к решению соответствующих дисперсионных уравнений. При выводе дисперсионного уравнения частоту  $\omega$  следует считать действительной величиной независимо от того, каким получится решение. Это фактически и было сделано в § 5 при исследовании затухания плазменных колебаний.

Перейдем теперь к задаче о колебаниях плазмы во внешних полях. Рассмотрим следующую идеализированную постановку задачи. Пусть в однородной среде в плоскости  $z = 0$  заданы

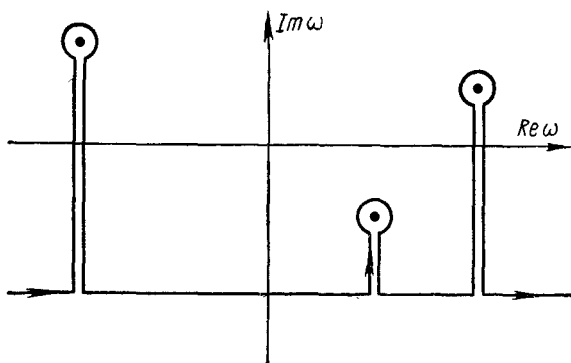


Рис. 15.

поверхностные токи и заряды, меняющиеся во времени по закону  $e^{-i\omega t}$ . Требуется найти поле при  $z > 0$ . Как известно, поверхностным токам и зарядам соответствуют разрыв тангенциальной составляющей магнитного поля и нормальной составляющей электрического поля. Обозначим через  $\mathbf{B}_1$  амплитуду магнитного поля, а через  $\mathbf{E}_0$  амплитуду электрического поля при  $z = 0$  справа от плоскости разрыва; через  $\mathbf{n} = \{0, 0, 1\}$  обозначим нормаль к поверхности. Тангенциальная составляющая магнитного поля при  $z = +0$  равна  $[\mathbf{nB}_1]$ , а при  $z = -0$  равна  $-\mathbf{[nB}_1]$ . Граничное условие гласит, что  $2[\mathbf{nB}_1] = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_{\text{пов}}$ . Соответствующая этому значению поверхностной плотности тока объемная плотность тока, сосредоточенного при  $z = 0$ , равна, очевидно,

$$\mathbf{j}(z) = \frac{c}{2\pi} [\mathbf{nB}_1] \delta(z). \quad (7.12)$$

Аналогично объемная плотность заряда выразится через  $\mathbf{E}_0$  в виде

$$\rho(z) = \frac{1}{2\pi} (\mathbf{nE}_0) \delta(z). \quad (7.13)$$

Ее можно включить в плотность тока согласно соотношению  $\text{div } \mathbf{j} = \partial j_z / \partial z = i\omega\rho$ . Учитывая, что \*

$$\int_0^z \delta(z') dz' = \frac{1}{2} \text{Sgn } z, \quad (7.14)$$

находим плотность тока, соответствующую заряду (7.13),

$$j_z(z) = i \frac{\omega}{4\pi} (\mathbf{nE}_0) \text{Sgn } z. \quad (7.15)$$

Таким образом, суммарная сторонняя плотность тока может быть выражена через граничные значения полей следующим образом:

$$\mathbf{j}_{\text{стор}}(\mathbf{r}, t) = \left\{ \frac{c}{2\pi} [\mathbf{nB}_1] \delta(z) + i \frac{\omega}{4\pi} (\mathbf{nE}_0) \mathbf{n} \cdot \text{Sgn } z \right\} e^{-i\omega t}. \quad (7.16)$$

Ее фурье-компонента  $\mathbf{j}(\mathbf{k}, \omega')$  равна

$$\begin{aligned} \mathbf{j}(\mathbf{k}, \omega') &= \frac{c}{4\pi^2} [\mathbf{nB}_1] \delta(\omega - \omega') \delta(k_{\perp}) + \\ &+ \frac{\omega}{4\pi^2} \mathbf{n} (\mathbf{nE}_0) \frac{P}{k_z} \delta(\omega - \omega') \delta(k_{\perp}). \end{aligned} \quad (7.17)$$

В таком виде фурье-компоненту  $\mathbf{j}(\mathbf{k}, \omega)$  следует подставить в формулы (6.40) и (6.51), выражающие поле через сторонний ток в изотропной и анизотропной средах. Так, например, для продольных колебаний изотропной плазмы, согласно формулам (6.40) и (7.17), имеем

$$E_z(z, t) = -\frac{i}{\pi} E_0 e^{-i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikz}}{k\varepsilon_{\parallel}(k, \omega)} dk. \quad (7.18)$$

Чтобы не иметь дела с главным значением интеграла, вычтем и прибавим к  $1/\varepsilon_{\parallel}$  член  $1/\varepsilon_0$ , где

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_{\parallel}(k=0) = 1 - \frac{\omega_{0e}^2}{\omega^2}. \quad (7.19)$$

Учитывая, что, согласно формуле разложения функции  $\text{Sgn } z$  в интеграл Фурье (6.26),

$$\frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikz}}{k} dk = -\text{Sgn } z, \quad (7.20)$$

---

\* Эта формула следует из четности  $\delta$ -функции и условия  $\int_{-\infty}^z \delta(z') dz' = 1$ .

из уравнения (7. 18) для  $z > 0$  получим

$$\left. \begin{aligned} E(z, t) &= \frac{1}{\varepsilon_0} E_0 e^{-i\omega t} + E_1(z, t); \\ E_1(z, t) &= -\frac{i}{\pi} \frac{E_0 e^{-i\omega t}}{\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon_0 - \varepsilon_{\parallel}(k)}{\varepsilon_{\parallel}(k)} e^{ikz} \frac{dk}{k}. \end{aligned} \right\} (7. 21)$$

Знак главного значения с интеграла снят, так как точка  $k = 0$  автоматически выпадает из области интегрирования благодаря разности  $\varepsilon_0 - \varepsilon_{\parallel}(k)$ . Особенностью интеграла, входящего в выражение для электрического поля, является то, что подынтегральное выражение не является аналитической функцией  $k$ , так как  $\varepsilon_{\parallel}(k)$  содержит в мнимой части модуль  $k$  (см. § 5 и 10). Поэтому интеграл не сводится к вычетам, и поле, вообще говоря, не имеет вида  $e^{i\frac{\omega}{c}Nz}$ , как это было бы в отсутствие теплового движения. Выражение (7. 21) для поля было исследовано Ландау [2]. При  $z \rightarrow \infty$   $E_1$  исчезает и поле оказывается таким же, как и без теплового движения:

$$E(z, t) \xrightarrow{(z \rightarrow \infty)} \frac{E_0}{\varepsilon_0} e^{-i\omega t}. \quad (7. 22)$$

Добавочное поле  $E_1(z, t)$  при  $z \gg a = \sqrt{\frac{T_e}{4\pi e^2 n_e}}$  имеет вид

$$E_1(z) = \frac{2E_0}{\sqrt{3\varepsilon_0^2}} \left( \frac{\omega}{\omega_{0e}} \right)^{2/3} \left( \frac{z}{a} \right)^{3/2} e^{-\frac{3}{4} \left( \frac{\omega z}{\omega_{0e} a} \right)^{3/2}} e^{i \left[ \frac{3\sqrt{2}}{4} \left( \frac{\omega z}{\omega_{0e} a} \right)^{3/2} + \frac{2}{3} \pi \right]}, \quad (7. 23)$$

если частота поля отличается от плазменной частоты  $\omega \neq \omega_{0e}$ . Вблизи резонанса ( $\omega \approx \omega_{0e}$ ) результат зависит от знака разности  $\omega - \omega_{0e}$ . При  $\omega < \omega_{0e}$  и  $\varepsilon_0 \ll 1$  общее поле имеет вид

$$E(z) = \frac{E_0}{\varepsilon_0} \left( 1 - e^{-\frac{z}{a} \sqrt{\frac{|\varepsilon_0|}{3}}} \right). \quad (7. 24)$$

При  $\omega > \omega_{0e}$  и  $|\varepsilon_0| \ll 1$  оно равно

$$E(z) = \frac{E_0}{\varepsilon_0} \left[ 1 - \exp \left\{ \frac{z}{a} \left( i \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{3}} - \frac{3}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-\frac{3}{2\varepsilon_0}}}{\varepsilon_0^2} \right) \right\} \right]. \quad (7. 25)$$

**Задача.** В момент  $t = 0$  в плазме возникает заряд  $e_1$ . Найти связанное с этим зарядом электрическое поле.

**Решение.** Включению заряда  $e_1$  соответствует сторонняя плотность заряда, определяемая уравнением

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = e_1 \delta(\mathbf{r}) \delta(t),$$

или, для фурье-компонент,  $-i\omega Q(\mathbf{k}, \omega) = \frac{e_1}{(2\pi)^4}$ . Отсюда  $\mathbf{j}_{\parallel} = \frac{\mathbf{k}}{k^2} (k\mathbf{j}) = \frac{\mathbf{k}}{k^2} \omega Q = i \frac{\mathbf{k}}{k^2} \frac{e_1}{(2\pi)^4}$ . Подставляя это выражение продольного тока в формулу (6. 40), находим общее выражение для электрического поля:

$$E(\mathbf{r}, t) = -\nabla\varphi;$$

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = i \int \frac{4\pi e_1}{k^2 \omega \varepsilon_{\parallel}(\mathbf{k}, \omega)} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} \frac{d\omega d\mathbf{k}}{(2\pi)^4}.$$

Интеграл по  $\omega$  сводится к обходу полюсов  $\omega = 0$  и  $\varepsilon_{\parallel}(\mathbf{k}, \omega_s) = 0$  против часовой стрелки:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \int \frac{4\pi e_1}{k^2 \varepsilon_{\parallel}(\mathbf{k}, 0)} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} + \sum_s \frac{4\pi e_1 \cdot e^{i(kr - \omega_s(k)t)}}{\omega_s k^2 \left[ \frac{\partial \varepsilon_{\parallel}}{\partial \omega} \right]_{\omega=\omega_s}} \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}.$$

Второе слагаемое описывает здесь процесс установления поля. При  $t \rightarrow \infty$  оно исчезает. Первое слагаемое, получившееся из-за обхода полюса  $\omega=0$ , описывает статическое поле заряда в плазме. Учитывая, что  $\varepsilon_{\parallel}(k, 0) = 1 + \frac{1}{k^2 d^2}$ , где  $d$  — дебаевский радиус  $\left[ \frac{1}{d^2} = \sum \frac{4\pi e^2 n}{T} \right]$ ; см. формулы (2. 21) и (9. 27)], получим, выполняя интегрирование по  $d\mathbf{k}$ :

$$\varphi(r, \infty) = e_1 \frac{e^{-\frac{r}{d}}}{r}.$$

## § 8. Корреляционная функция микротоков

Корреляционная функция  $G_{\alpha\beta}(\mathbf{R}, \tau)$ , через которую в случае равновесной среды выражается тензор  $\sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{R}, \tau)$  и в конечном итоге тензор электрической проницаемости, имеет важное и самостоятельное значение. Если в уравнениях (6. 1) под  $\mathbf{j}_{\text{стор}}$  понимать микроскопическую плотность тока (6. 8), то решение этих уравнений даст флуктуационное поле. Его среднее значение, конечно, равно нулю. Представляющие же практический интерес средние значения квадратичных величин, которыми определяются энергия, интенсивность излучения, средний квадрат флуктуационной ЭДС и т. д., отличны от нуля и выражаются через корреляционную функцию микротоков. В случае высокотемпературной плазмы основной интерес представляет корреляционная функция микротоков без учета взаимодействия между зарядами. Эта функция может быть легко вычислена, если известна обычная одинарная функция распределения зарядов  $F(\mathbf{p})$ .

Обозначим через  $\mathbf{r}_i^0$  положение  $i$ -го заряда в момент  $t = 0$ , а через  $\mathbf{v}_i(t)$  — его скорость в момент времени  $t$ . В однородной среде, которую мы здесь только и рассматриваем,  $\mathbf{v}_i(t)$  зависит лишь от начальной скорости  $\mathbf{v}_i(0)$ , но не от начального положе-

ния заряда. Микроскопические плотности тока и заряда запишутся в виде

$$\mathbf{j}^M(\mathbf{r}, t) = \sum_{i=1}^N e_i \mathbf{v}_i(t) \delta\left(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i^0 - \int_0^t \mathbf{v}_i(t') dt'\right); \quad (8.1)$$

$$\rho^M(\mathbf{r}, t) = \sum_{i=1}^N e_i \delta\left(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i^0 - \int_0^t \mathbf{v}_i(t') dt'\right). \quad (8.2)$$

Здесь  $N$  — полное число зарядов в рассматриваемом объеме. По определению функции корреляции токов  $G_{\alpha\beta}(\mathbf{R}, \tau) = \overline{j_{\alpha}^M(\mathbf{r}, t) j_{\beta}^M(\mathbf{r}', t')}$ , имеем

$$G_{\alpha\beta}(\mathbf{R}, \tau) = \overbrace{\int \dots \int}_V \overbrace{\int \dots \int}_p \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N e_i e_k v_{i\alpha}(t) v_{k\beta}(t') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)) \times \\ \times \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_k(t')) D_0 d\mathbf{r}_1^0 \dots d\mathbf{r}_N^0 d\mathbf{p}_1^0 \dots d\mathbf{p}_N^0. \quad (8.3)$$

Если пренебречь взаимодействием между зарядами, то  $D_0$  будет представлять собой произведение максвелловских распределений

$$D_0 = \frac{1}{V^N} \prod_{i=1}^N A_i e^{-\frac{\varepsilon_i}{T}}; \quad \varepsilon_i = \sqrt{m_{0i}^2 c^2 + c^2 p_{0i}^2}; \\ A_i = \frac{m_{0i} c^2}{4\pi T \cdot K_2(m_{0i} c^2 / T)}$$

и в двойной сумме отличными от нуля будут только слагаемые, содержащие произведения, относящиеся к одному и тому же заряду ( $i = k$ ), причем координаты и скорости данного заряда не зависят от координат и скоростей остальных зарядов. Выполняя интегрирование по переменным этих зарядов (число которых  $N - 1$ ), будем получать выражения типа

$$\overbrace{\int \dots \int}_V \overbrace{\int \dots \int}_p D_0 d\mathbf{r}_2^0 \dots d\mathbf{r}_N^0 d\mathbf{p}_2^0 \dots d\mathbf{p}_N^0 = \frac{1}{V} F(\mathbf{p}_0), \quad (8.4)$$

где  $F(\mathbf{p}_0)$  — одинарная функция распределения. Выполняя затем в оставшемся выражении интегрирование по  $d\mathbf{r}_1^0$ , получим для каждого сорта зарядов  $N_{\alpha}$  одинаковых слагаемых ( $N_{\alpha}$  — полное число зарядов сорта  $\alpha$ ). Обозначая плотность зарядов данного сорта через

$$n_{\alpha} = \frac{N_{\alpha}}{V}, \quad (8.5)$$

найдем корреляционные функции плотности токов и зарядов:

$$G_{00} = \overline{\varrho^M(\mathbf{r}, t) \varrho^M(\mathbf{r}', t')} - \sum e_\alpha^2 n_\alpha^2 = \\ = \sum_\alpha e_\alpha^2 n_\alpha \int \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}_\alpha(t, t')) F(\mathbf{p}_0) d\mathbf{p}_0; \quad (8.6)$$

$$G_{\alpha\beta} = \sum_\alpha e_\alpha^2 n_\alpha \int v_\alpha(t) v_\beta(t') \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}_\alpha(t, t')) F(\mathbf{p}_0) d\mathbf{p}_0; \quad (8.7)$$

$$\mathbf{R}_\alpha(t, t') = \int_{t'}^t \mathbf{v}_\alpha(t'') dt''. \quad (8.8)$$

Рассмотрим в качестве примера простейший случай — идеальный электронный газ в отсутствие магнитного поля. Здесь

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{v}(t) &= \text{const} = \mathbf{v}_0; \\ \mathbf{R}(t, t') &= \mathbf{v}_0(t - t'). \end{aligned} \right\} \quad (8.9)$$

В подынтегральных выражениях формул (8.6) и (8.7) произведем следующее преобразование переменных:

$$\delta(\mathbf{R} - \mathbf{v}_0(t - t')) d\mathbf{p}_0 = \frac{\delta\left(\frac{\mathbf{R}}{\tau} - \mathbf{v}_0\right)}{|\tau|^3} \left(\frac{\varepsilon}{c^2}\right)^2 d\mathbf{v}_0, \quad (8.10)$$

где

$$\varepsilon = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}}, \quad \tau = t - t'.$$

Интегрирование по  $\mathbf{v}_0$  дает нуль для расстояний и промежутков времени, удовлетворяющих условию  $R > c|\tau|$ , и сводится к замене  $\mathbf{v}_0$  на  $\mathbf{R}/|\tau|$  в множителе перед  $\delta$ -функцией, если  $R < c\tau$ . Так, для максвелловского распределения

$$F(\mathbf{p}_0) d\mathbf{p}_0 = A e^{-\frac{\varepsilon}{T}} d\mathbf{p}_0; \quad A = \frac{m_0 c^2}{4\pi T \cdot K_2\left(\frac{m_0 c^2}{T}\right)} \quad (8.11)$$

получаем  $G_{00} = G_{\alpha\beta} = 0$  при  $R > c|\tau|$  и

$$\left. \begin{aligned} G_{\alpha\beta} &= \frac{R_\alpha R_\beta}{\tau^2} G_{00}; \\ G_{00} &= \frac{e^2 n A}{(c^2 \tau^2 - R^2)^{3/2}} e^{-\frac{m_0 c^2}{T} \frac{c|\tau|}{(c^2 \tau^2 - R^2)^{1/2}}}; \end{aligned} \right\} R \leq c|\tau|. \quad (8.12)$$

В нерелятивистском случае эти формулы имеют вид

$$G_{\alpha\beta} = \frac{R_\alpha R_\beta}{\tau^2} G_{00} = e^2 n \frac{R_\alpha R_\beta}{|\tau|^5} \left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{3/2} e^{-\frac{mR^2}{2T\tau^2}}. \quad (8.13)$$



При  $T \rightarrow 0$  предельное значение функции  $G_{\alpha\beta}(\mathbf{R}, \tau)$  будет

$$G_{\alpha\beta}(\mathbf{R}, \tau) = T \cdot \frac{e^2 n}{m} \delta(\mathbf{R}) \delta_{\alpha\beta}. \quad (8.14)$$

Эту формулу проще получить непосредственно из выражения (8.7), полагая  $\mathbf{R}(t) = 0$ .

При расчетах большой интерес представляет не пространственно-временная функция корреляции токов, а корреляционная функция фурье-компонент микротоков, равная, согласно определению фурье-компоненты плотности тока (6.14а):

$$\overline{j_{\alpha}^M(\mathbf{k}, \omega) j_{\beta}^{*M}(\mathbf{k}', \omega')} = \frac{1}{(2\pi)^8} \int G_{\alpha\beta}(\mathbf{R}, \tau) \times \\ \times e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{R} - \omega\tau) + i[(\mathbf{k}' - \mathbf{k})\mathbf{r}' - (\omega' - \omega)t']} d\mathbf{r} d\mathbf{r}' dt dt'. \quad (8.15)$$

Переходя от переменных  $\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t'$  к переменным  $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ ,  $\mathbf{r}', \tau = t - t', t'$ , найдем

$$\overline{j_{\alpha}^M(\mathbf{k}, \omega) j_{\beta}^{*M}(\mathbf{k}', \omega')} = G_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta(\omega - \omega'), \quad (8.16)$$

где  $G_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega)$  оказывается ни чем иным, как фурье-компонентой  $G_{\alpha\beta}(\mathbf{R}, \tau)$ :

$$G_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int G_{\alpha\beta}(\mathbf{R}, \tau) e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{R} - \omega\tau)} d\mathbf{R} d\tau. \quad (8.17)$$

Заметим, что в однородной среде, находящейся в стационарных условиях, наряду с корреляционной функцией микротоков можно ввести корреляционные функции и других величин, например  $\overline{E_{\alpha}(\mathbf{r}, t) E_{\beta}(\mathbf{r}', t')}$ ,  $\overline{E_{\alpha}(\mathbf{r}, t) H_{\beta}(\mathbf{r}', t')}$  и т. д., которые в силу однородности и стационарности являются функциями от  $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$  и  $\tau = t - t'$ . Для краткости будем обозначать

$$(E_{\alpha} H_{\beta})_{\mathbf{R}, \tau} \equiv \overline{E_{\alpha}(\mathbf{r}, t) H_{\beta}(\mathbf{r}', t')}. \quad (8.18)$$

По аналогии с выражением (8.16) можно написать соотношение

$$\overline{E_{\alpha}(\mathbf{k}, \omega) H_{\beta}^{*}(\mathbf{k}', \omega')} = (E_{\alpha} H_{\beta}^{*})_{\mathbf{k}, \omega} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta(\omega - \omega'), \quad (8.19)$$

причем

$$(E_{\alpha} H_{\beta}^{*})_{\mathbf{k}, \omega} = \frac{1}{(2\pi)^4} \int (E_{\alpha} H_{\beta})_{\mathbf{R}, \tau} e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{R} - \omega\tau)} d\mathbf{R} d\tau; \quad (8.20)$$

$$(E_{\alpha} H_{\beta})_{\mathbf{R}, \tau} = \int (E_{\alpha} H_{\beta}^{*})_{\mathbf{k}, \omega} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{R} - \omega\tau)} d\mathbf{k} d\omega. \quad (8.21)$$

Согласно определению (8.18),  $(E_{\alpha} H_{\beta})_{00}$  представляет собой просто среднее значение произведения  $E_{\alpha} H_{\beta}$ . На основании соотношения (8.21) при  $\mathbf{R} = \tau = 0$ :

$$(E_{\alpha} H_{\beta})_{00} = \int (E_{\alpha} H_{\beta}^{*})_{\mathbf{k}, \omega} d\mathbf{k} d\omega \quad (8.22)$$

величину  $(E_{\alpha}H_{\beta}^*)_{\mathbf{k}, \omega}$  называют спектральной плотностью среднего произведения  $E_{\alpha}H_{\beta}$ . Последнюю формулу можно написать также в виде

$$(E_{\alpha}H_{\beta})_{00} = \frac{1}{2} \int \{ (E_{\alpha}H_{\beta}^*)_{\mathbf{k}, \omega} + (E_{\alpha}^*H_{\beta})_{\mathbf{k}, \omega} \} d\mathbf{k} d\omega. \quad (8. 23)$$

Так, например, для средней энергии, поглощаемой средой, за единицу времени получим

$$\overline{\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)} = \int \sigma'_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega) (E_{\alpha}^*E_{\beta})_{\mathbf{k}, \omega} d\mathbf{k} d\omega. \quad (8. 24)$$

Это выражение поглощаемой энергии с помощью  $\sigma'_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega)$  в отличие от формулы (1. 10) верно и при сильном поглощении.

Вернемся теперь снова к корреляционной функции микро-токов.

В случае среды, находящейся в статистическом равновесии, как мы видели, функции  $G_{\alpha\beta}$  и  $\sigma_{\alpha\beta}$  связаны соотношением

$$G_{\alpha\beta}(\mathbf{R}, \tau) = T\sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{R}, \tau). \quad (8. 25)$$

Сравнение  $G_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega)$  с  $\sigma'_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega)$  [формула (6. 19)] с учетом этой связи позволяет получить соотношение между фурье-компонентой  $G_{\alpha\beta}$  и антиэрмитовской частью тензора электрической проницаемости  $\varepsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega)$ :

$$G_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{2T}{(2\pi)^4} \sigma'_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{T}{(2\pi)^5} \omega \varepsilon''_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega). \quad (8. 26)$$

Функция  $G_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega)$  может быть вычислена либо как фурье-компонента от  $G_{\alpha\beta}(\mathbf{R}, \tau)$ , либо непосредственно, исходя из выражений для фурье-компонент микроскопической плотности тока:

$$j_{\alpha}^{\mathbf{M}}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \sum_{i=1}^N e_i v_{i\alpha}(t) \delta \left( \mathbf{r} - \mathbf{r}_{i0} - \int_0^t \mathbf{v}(t') dt' \right) e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} d\mathbf{r} dt. \quad (8. 27)$$

Благодаря наличию  $\delta$ -функции интегрирование по  $\mathbf{r}$  легко выполняется и для среднего статистического от произведения двух спектральных компонент плотности тока в приближении некоррелирующих зарядов будем иметь, учитывая определения (8. 4) и (8. 5):

$$\overline{j_{\alpha}^{\mathbf{M}}(\mathbf{k}, \omega) j_{\beta}^{\mathbf{M}}(\mathbf{k}', \omega')} = \sum \frac{e^2 n}{(2\pi)^8} \int v_{\alpha}(t) v_{\beta}(t') \times \\ \times e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\mathbf{r}_0 - i \left[ \mathbf{k} \int_0^t \mathbf{v} dt - \mathbf{k}' \int_0^{t'} \mathbf{v} dt' \right] - i\omega t + i\omega' t'} F(\mathbf{p}_0) dt dt' dp_0 d\mathbf{r}_0 \quad (8. 28)$$

(суммирование производится по сортам зарядов). Интегрирование по  $\mathbf{r}_0$  дает  $\delta$ -функцию  $(2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$ , так что в подынтегральном выражении можно положить  $\mathbf{k}' = \mathbf{k}$ . Получающийся при

этом множитель  $v_\alpha(t) v_\beta(t') e^{-ik \int_{t'}^t v(t'') dt''}$  после усреднения по начальным скоростям может зависеть только от разности  $\tau = t - t'$ , так как момент  $t'$  ничем не выделен. Вводя далее переменные  $\tau$  и  $t'$  вместо  $t$  и  $t'$  и выполняя интегрирование по  $t'$ , получим еще одну  $\delta$ -функцию:  $2\pi \delta(\omega - \omega')$ . В оставшемся интеграле по  $\tau$ , поскольку подынтегральное выражение зависит только от разности  $\tau = t - t'$ , можно положить  $t' = 0$ . Таким образом, мы получаем выражение вида (8.16), где  $G_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega)$  определяется по формуле

$$G_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega) = \sum \frac{e^2 n}{(2\pi)^4} \int v_\alpha(t) v_\beta(0) e^{i\left(\omega t - \mathbf{k} \int_0^t \mathbf{v}(t') dt'\right)} F(\mathbf{p}_0) d\mathbf{p}_0 dt. \quad (8.29)$$

Здесь переменная интегрирования  $\tau$  заменена на  $t$ . Полученное выражение для спектральной корреляционной функции микротокв годится при произвольной функции распределения зарядов, удовлетворяющей условию однородности и стационарности невозмущенной колебаниями среды (разумеется, при сделанном допущении, что взаимодействием между зарядами можно пренебречь).

Преобразуем это выражение для случая движения зарядов в однородном магнитном поле.

Пусть  $k_x = k_\perp \cos \kappa$ ,  $k_y = k_\perp \sin \kappa$ . Используя закон движения зарядов (4.6), находим

$$\mathbf{k} \int_0^t \mathbf{v}(t') dt' = \frac{k_\perp v_\perp}{\omega_B} [\sin(\omega_B t + \varphi_0 + \kappa) - \sin(\varphi_0 + \kappa)] + k_\parallel v_\parallel t. \quad (8.30)$$

Функция  $G_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega)$  может быть представлена в виде разложения, отдельные члены которого соответствуют рассмотренным в § 4 резонансам. Воспользуемся разложением (см. приложение I)

$$e^{-i \frac{k_\perp v_\perp}{\omega_B} \sin(\omega_B t + \varphi_0 + \kappa)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n\left(\frac{k_\perp v_\perp}{\omega_B}\right) e^{-in(\omega_B t + \varphi_0 + \kappa)}. \quad (8.31)$$

В импульсном пространстве используем цилиндрическую систему координат, в которой  $d\mathbf{p} = p_\perp dp_\perp dp_\parallel d\varphi_0$ . Выражая компоненты скорости, входящие в интеграл (8.29), в виде

$$v_x(t) = v_\perp \cos(\omega_B t + \varphi_0) = \frac{v_\perp}{2} \{e^{i(\omega_B t + \varphi_0)} + e^{-i(\omega_B t + \varphi_0)}\} \text{ и т. д.,} \quad (8.32)$$

будем получать, учитывая осевую симметрию функции распределения, интегралы по  $d\varphi_0$  и  $dt$  вида

$$\int_0^{2\pi} e^{-i(n \mp m)(\varphi_0 + \kappa) + i \frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega_B} \sin(\varphi_0 + \kappa)} d\varphi_0 = 2\pi J_{n \mp m} \left( \frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega_B} \right); \quad (8.33)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega - k_{\parallel} v_{\parallel} - (n \mp p) \omega_B) t} dt = 2\pi \delta(\omega - k_{\parallel} v_{\parallel} - (n \mp p) \omega_B), \quad (8.34)$$

где  $m$  и  $p$  — целые числа. Заменяя далее индекс суммирования  $n$  на  $n \pm p$  так, чтобы аргументы у  $\delta$ -функций имели вид  $\omega - k_{\parallel} v_{\parallel} - n\omega_B$ , получим после весьма простых, но несколько громоздких преобразований

$$G_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega) = \sum \frac{e^2 n}{4\pi^2} \int \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k_{\parallel} v_{\parallel} - n\omega_B) \times \\ \times \Pi_{\alpha\beta}^{(n)} F(p) p_{\perp} dp_{\perp} dp_{\parallel}. \quad (8.35)$$

Здесь  $\omega_B = \frac{eB}{m_0 c^2} \sqrt{1 - \beta^2}$ , а через  $\Pi_{\alpha\beta}^{(n)}$  обозначены следующие комбинации:

$$\left. \begin{aligned} \Pi_{xx}^{(n)} &= \frac{v_{\perp}^2}{4} \{J_{n+1}^2 + J_{n-1}^2 + 2J_{n+1}J_{n-1} \cos 2\kappa\}; \\ \Pi_{yy}^{(n)} &= \frac{v_{\perp}^2}{4} \{J_{n+1}^2 + J_{n-1}^2 - 2J_{n+1}J_{n-1} \cos 2\kappa\}; \\ \Pi_{xy}^{(n)} &= \Pi_{yx}^{(n)*} = -i \frac{v_{\perp}^2}{4} \{J_{n+1}^2 - J_{n-1}^2 + 2iJ_{n+1}J_{n-1} \sin 2\kappa\}; \\ \Pi_{xz}^{(n)} &= \Pi_{zx}^{(n)*} = \frac{v_{\perp} v_{\parallel}}{2} \{J_n J_{n+1} e^{-i\kappa} + J_n J_{n-1} e^{i\kappa}\}; \\ \Pi_{yz}^{(n)} &= \Pi_{zy}^{(n)*} = i \frac{v_{\perp} v_{\parallel}}{2} \{J_n J_{n+1} e^{-i\kappa} - J_n J_{n-1} e^{i\kappa}\}; \\ \Pi_{zz}^{(n)} &= v_{\parallel}^2 J_n^2. \end{aligned} \right\} \quad (8.36)$$

У всех функций Бесселя аргументом является  $\frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega_B}$ .

**Задача.** Найти корреляционную функцию  $G_{\alpha\beta}(\mathbf{R}, \tau)$  для зарядов одного сорта в плазме, находящейся в однородном магнитном поле.

**Решение.** Из закона движения зарядов в однородном магнитном поле  $\mathbf{B}_0 = \{0, 0, B_0\}$  следует для проекций вектора  $\mathbf{R}(\tau)$ , входящего в уравнение (8.7):

$$X_1(\tau) = \frac{p_{\perp} c}{eB_0} [\sin(\omega_B t + \varphi_0) - \sin(\omega_B t' + \varphi_0)] = R_1^{\perp} \cos \varphi_1;$$

$$Y_1(\tau) = \frac{p_{\perp} c}{eB_0} [\cos(\omega_B t + \varphi_0) - \cos(\omega_B t' + \varphi_0)] = -R_1^{\perp} \sin \varphi_1;$$

$$Z_1(\tau) = \frac{p_{\parallel} c^2}{\varepsilon} (t - t').$$

Здесь

$$\omega_B = \frac{eB_0 c}{\varepsilon}; \quad R_1^\perp = \frac{c\rho_\perp}{eB_0} 2 \sin \frac{\omega_B(t-t')}{2};$$

$$\varphi_1 = \varphi_0 + \frac{\omega_B}{2}(t+t'); \quad \operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{p_y}{p_x}.$$

Перейдем от переменных  $p_x, p_y, p_z$  к переменным  $R_1^\perp, \varphi_1, Z_1$ :

$$\begin{aligned} & \delta(X - X_1) \delta(Y - Y_1) \delta(Z - Z_1) dp_x dp_y dp_z = \\ & = \delta(R_\perp - R_1^\perp) \frac{\delta(\varphi - \varphi_1)}{R_1^\perp} \delta(Z - Z_1) \frac{R_1^\perp dR_1^\perp dZ_1 d\varphi_1}{\left[ \frac{2c}{eB_0} \sin \frac{\omega_B(t-t')}{2} \right]^2 \frac{c^2(t-t')^2}{\varepsilon}}. \end{aligned}$$

Выполняя простое интегрирование, при условии  $R_\perp^2 + Z^2 < c^2\tau^2$  получаем

$$G_{\alpha\beta} = v_\alpha(t) v_\beta(t') \cdot G_{00} = v_\alpha(t) v_\beta(t') e^2 n \frac{e^2 B^2}{4c^2} \frac{\varepsilon(\mathbf{p}) F(\mathbf{p})}{c^2 |\tau| \sin^2 \frac{\omega_B \tau}{2}}.$$

Условие  $R_\perp^2 + Z^2 < c^2\tau^2$  получается из-за ограниченности скорости зарядов ( $v \leq c$ ). Если это условие не выполняется, то  $G_{\alpha\beta} = 0$ . В уравнении для  $G_{\alpha\beta}$  импульс должен быть выражен через  $R_\perp, \tau$  из условий  $Z = Z_1, R_\perp = R_1^\perp$ , которые приводят к уравнениям

$$\begin{aligned} p_\parallel^2 &= (m_0 c^2 + p_\perp^2) \frac{Z^2}{c^2 \tau^2 - Z^2}; \\ \sin \frac{eB_0}{2c} \sqrt{\frac{c^2 \tau^2 - Z^2}{m_0^2 c^2 + p_\perp^2}} &= \frac{eB_0}{2c} \frac{R_\perp}{p_\perp}. \end{aligned}$$

Компоненты  $v_\alpha(t), v_\beta(t')$  выражаются через  $\mathbf{R}, \tau$  с помощью уравнений движения и равны:

$$v_x(t) \equiv \frac{\omega_B Y}{2} + \frac{\omega_B X}{2} \operatorname{ctg} \frac{\omega_B}{2} \tau; \quad v_x(t') \equiv -\frac{\omega_B Y}{2} + \frac{\omega_B X}{2} \operatorname{ctg} \frac{\omega_B}{2} \tau;$$

$$v_y(t) \equiv -\frac{\omega_B X}{2} + \frac{\omega_B Y}{2} \operatorname{ctg} \frac{\omega_B}{2} \tau; \quad v_y(t') \equiv \frac{\omega_B X}{2} + \frac{\omega_B Y}{2} \operatorname{ctg} \frac{\omega_B}{2} \tau;$$

$$v_z(t) \equiv \frac{Z}{\tau}; \quad v_z(t') \equiv -\frac{Z}{\tau}.$$

В нерелятивистском приближении  $G_{\alpha\beta}$  имеет вид

$$G_{\alpha\beta} = v_\alpha(t) v_\beta(t') e^2 n \left( \frac{m}{2\pi T} \right)^{3/2} \frac{\omega_B^2}{4} \frac{e}{|\tau| \sin^2 \frac{\omega_B}{2} \tau} \left( -\frac{m}{2T} \left( \frac{\omega_B^2 R_\perp^2}{4 \sin^2 \frac{\omega_B}{2} \tau} + \frac{Z^2}{\tau^2} \right) \right).$$

## § 9. Электрическая проницаемость

Электрическая проницаемость среды, находящейся в статистическом равновесии, может быть определена через корреляционную функцию микротоков  $G_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega)$ . Для этого можно воспользоваться выражением  $\epsilon''_{\alpha\beta}$  через  $G_{\alpha\beta}$  [формула (8. 26)] и формулой Крамера (6. 27), определяющей с учетом соотношения (1. 8)  $\epsilon_{\alpha\beta}$  через  $\epsilon''_{\alpha\beta}$ . Однако его можно получить проще, сопоставив формулы (6. 17), (8. 17) и (8. 29) для  $\sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega)$  и  $G_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega)$ . Учитывая, что  $\sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{R}, \tau) = \frac{1}{T} G_{\alpha\beta}(\mathbf{R}, \tau)$ , мы видим, что  $\sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega)$  выражается интегралом того же вида, что и  $G_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega)$ , отличаясь только множителем и пределами интегрирования. Чтобы получить  $\sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega)$ , нужно в выражении (8. 17) для  $G_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega)$  интегрировать по  $\tau$  (а в выражении (8. 29) соответственно по  $t$ ) не от  $-\infty$  до  $+\infty$ , а от 0 до  $+\infty$ . Кроме этого, необходимо ввести множитель  $(2\pi)^4/T$ . Таким путем для тензора  $\epsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega) = \delta_{\alpha\beta} + i \frac{4\pi\sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega)}{\omega}$  получается формула [17]:

$$\epsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega) = \delta_{\alpha\beta} + i \sum \frac{4\pi e^2 n}{\omega T} \times \left\langle \int_0^{\infty} v_{\alpha}(t) v_{\beta}(0) e^{i(\omega t - \mathbf{k} \int_0^t \mathbf{v}(t') dt')} dt \right\rangle, \quad (9. 1)$$

где угловые скобки означают усреднение по равновесной (максвелловской) функции распределения  $F(\mathbf{p}_0)$ .

Предположение о равновесности распределения зарядов выразилось в том, что при нахождении функции распределения  $D_1$  (§ 6) было использовано условие  $\frac{\partial D_0}{\partial p_i} = \frac{v_i}{T} D_0$ , благодаря чему, в частности, выпало магнитное поле волны. При выводе формулы для  $\epsilon_{\alpha\beta}$  без этого ограничения удобнее исходить непосредственно из кинетического уравнения для одинарной функции распределения

$$\frac{\partial f^{(1)}}{\partial t} + [H^0 f^{(1)}] = -e \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{vB}] \right\} \frac{\partial F_0}{\partial \mathbf{p}}, \quad (9. 2)$$

где  $H^0$  — гамильтониан заряда в отсутствие электромагнитной волны.

Решение этого уравнения можно написать в общем виде, если перейти от переменных  $\mathbf{r}, \mathbf{v}, t$  к переменным  $\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0, t$ , связь между которыми определяется законом невозмущенного движения заряда:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \int_0^t \mathbf{v}(t') dt'. \quad (9. 3)$$

Кинетическое уравнение в этих переменных принимает вид

$$\frac{df^{(1)}}{dt} = -e \left\{ \mathbf{E}(\mathbf{r}(t), t) + \frac{1}{c} [\mathbf{v}(t) \mathbf{B}(\mathbf{r}(t), t)] \right\} \frac{\partial F_0}{\partial \mathbf{p}(t)}. \quad (9.4)$$

Как и прежде, считаем, что электромагнитной волны при  $t = -\infty$  нет, соответственно  $f^{(1)} = 0$  при  $t = -\infty$ . Тогда решение этого уравнения запишется в виде

$$f^{(1)} = -e \int_{-\infty}^t \left\{ \mathbf{E}(\mathbf{r}(t'), t') + \frac{1}{c} [\mathbf{v}(t') \mathbf{B}(\mathbf{r}(t'), t')] \right\} \frac{\partial F_0}{\partial \mathbf{p}(t')} dt'. \quad (9.5)$$

Плотность тока, усредненную по начальным координатам  $\mathbf{r}_0$  и импульсам  $\mathbf{p}(0)$  зарядов, можно записать в виде

$$j_{\alpha}(\mathbf{r}, t) = \sum en \int v_{\alpha}(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t)) f^{(1)}(\mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0) d\mathbf{r}_0 d\mathbf{p}_0. \quad (9.6)$$

Рассмотрим теперь это выражение для отдельной спектральной гармоники. При этом  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}$ ,  $\mathbf{B} = \frac{c}{\omega} [\mathbf{k}\mathbf{E}]$  и выражение в фигурных скобках (9.5) принимает вид

$$\left\{ \mathbf{E}_0 \left( 1 - \frac{\mathbf{k}\mathbf{v}(t')}{\omega} \right) + \frac{\mathbf{k}(\mathbf{E}_0 \mathbf{v}(t'))}{\omega} \right\} e^{i \left( \mathbf{k}\mathbf{r}_0 + \mathbf{k} \int_0^{t'} \mathbf{v}(t'') dt'' - \omega t' \right)}. \quad (9.7)$$

Подставляя теперь выражение  $f^{(1)}$  в уравнение (9.6) и выполняя интегрирование по  $\mathbf{r}_0$  ( $\mathbf{r}_0$  входит в аргумент  $\delta$ -функции через  $\mathbf{r}(t)$ ), получим

$$\begin{aligned} j_{\alpha}(\mathbf{r}, t) &= \\ &= - \sum e^2 n E_{0\beta} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} \int_{-\infty}^t v_{\alpha}(t) \frac{\partial F_0}{\partial p_{\gamma}(t')} \times \\ &\times \left\{ \left( 1 - \frac{\mathbf{k}\mathbf{v}(t')}{\omega} \right) \delta_{\gamma\beta} + \frac{k_{\gamma} v_{\beta}(t')}{\omega} \right\} e^{i \left( \omega\tau - \mathbf{k} \int_{t'}^t \mathbf{v}(t'') dt'' \right)} dt' d\mathbf{p}_0. \end{aligned} \quad (9.8)$$

Выражение в интеграле по  $t'$  после усреднения по скоростям может зависеть от  $t$  и  $t'$  только через разность  $\tau = t - t'$  (так как  $t'$  ничем не выделено). Таким образом, мы имеем интеграл типа

$$\int_{-\infty}^t f(t - t') dt' = - \int_{\infty}^0 f(\tau) d\tau = \int_0^{\infty} f(t) dt. \quad (9.9)$$

Отсюда видно, что в интеграле для  $j_{\alpha}$  можно положить  $t' = 0$  и интегрировать при этом следует по  $t$  от 0 до  $\infty$ . Сравнивая

выражение (9. 8) с соотношением  $j_\alpha = \sigma_{\alpha\beta} E_\beta$ , находим  $\sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega)$  и тензор  $\varepsilon_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + i \frac{4\pi\sigma_{\alpha\beta}}{\omega}$ :

$$\varepsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega) = \delta_{\alpha\beta} - i \sum \frac{4\pi e^2 n}{\omega} \int dp_0 \int v_\alpha(t) \left[ \left(1 - \frac{\mathbf{k}v_0}{\omega}\right) \frac{\partial F_0}{\partial p_\beta^0} + \frac{v_\beta^0}{\omega} \mathbf{k} \frac{\partial F_0}{\partial p_0} \right] e^{i\left(\omega t - \mathbf{k} \int_0^t v(t') dt'\right)} dt. \quad (9. 10)$$

Если  $-\frac{\partial F_0}{\partial p} = \frac{vF_0}{T}$ , то отсюда получается формула (9. 1).

Вычислим  $\varepsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega)$  в однородной изотропной плазме без магнитного поля. В этом случае  $\mathbf{v}(t) = \text{const} = \mathbf{v}_0$ . Выберем систему координат, в которой волновой вектор направлен по оси  $z$ :  $\mathbf{k} = \{0, 0, k\}$ . Тогда тензор  $\varepsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega)$  равен

$$\varepsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega) = \delta_{\alpha\beta} + i \left\langle \sum \frac{4\pi e^2 n}{\omega T} \int_0^\infty v_\alpha^0 v_\beta^0 e^{i(\omega - kv_z^0)t} dt \right\rangle. \quad (9. 11)$$

Здесь и в дальнейшем при вычислении тензора  $\varepsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega)$  встречается интеграл типа  $\zeta(x) = -i \int_0^\infty e^{ixt} dt$ . Для вычисления этого интеграла введем подынтегральный множитель  $e^{-vt}$ , впоследствии устремим  $v$  к нулю. Имеем

$$-i \int_0^\infty e^{ixt - vt} dt = \frac{1}{x + iv} = \frac{x}{x^2 + v^2} - i \frac{v}{x^2 + v^2}: \quad (9. 12)$$

С первым слагаемым мы встречались [см. выражение (6. 23)]. При  $v \rightarrow 0$  оно обращается в главное значение  $1/x$ . Второе слагаемое при  $v \rightarrow 0$  обращается в  $\delta$ -функцию, умноженную на  $\pi$ :

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{x}{x^2 + v^2} = \frac{P}{x}; \quad \lim_{v \rightarrow 0} \frac{v}{x^2 + v^2} = \pi \delta(x). \quad (9. 13)$$

Таким образом,

$$\zeta(x) \equiv -i \int_0^\infty e^{ixt} dt = \frac{P}{x} - i\pi \delta(x). \quad (9. 14)$$

Знак мнимой части функции  $\zeta(x)$  однозначно связан с тем, что интегрирование по  $t$  производится от 0 до  $\infty$ , что в конечном итоге связано с принципом причинности, выражаемым тем фактом, что ток  $\mathbf{j}(t)$  определяется значениями  $\mathbf{E}(t')$  только в предшествующую



щие моменты времени. Учитывая соотношение (9. 13), из уравнения (9. 11) получим теперь

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{\perp} = 1 - \sum \frac{4\pi e^2 n}{m\omega} \langle \zeta(\omega - kv_z) \rangle; \quad (9. 15)$$

$$\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{\parallel} = 1 - \sum \frac{4\pi e^2 n}{m\omega} \left\langle \frac{mv_z^2}{T} \zeta(\omega - kv_z) \right\rangle. \quad (9. 16)$$

Остальные компоненты  $\varepsilon_{\alpha\beta}$  равны нулю. Заметим здесь, что при рассмотрении колебаний плазмы при наличии пучков обычно в качестве функции распределения зарядов в пучке принимают максвелловское распределение, сдвинутое на среднюю скорость пучка  $v_0$  [3]:

$$f(v_z) dv_z = \left( \frac{m}{2\pi T} \right)^{1/2} e^{-\frac{m(v_z - v_0)^2}{2T}} dv_z. \quad (9. 17)$$

Если пренебречь влиянием магнитного поля, создаваемого зарядами пучка, то среда — плазма плюс пучок — может рассматриваться однородной. Компонента  $\varepsilon_{\perp}$  тензора электрической проницаемости не меняется, а компонента  $\varepsilon_{\parallel}$ , очевидно, равна

$$\varepsilon_{\parallel} = 1 - \sum \frac{\omega_0^2}{\omega} \left\langle \frac{m(v_z - v_0)v_z}{T} \zeta(\omega - kv_z) \right\rangle. \quad (9. 18)$$

Мнимая часть компонент  $\varepsilon_{\parallel}$  и  $\varepsilon_{\perp}$  вычисляется просто, так как

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(v_z) \delta(\omega - kv_z) dv_z = \frac{1}{k} F\left(\frac{\omega}{k}\right). \quad (9. 19)$$

Действительную часть приходится обычно вычислять приближенно.

В приложении II показано, что при максвелловском распределении зарядов по скоростям (в нерелятивистском случае)

$$\langle \zeta(\omega - kv) \rangle = \frac{1}{\omega} Z\left(\frac{\omega}{kv_T}\right); \quad v_T = \sqrt{\frac{2T}{m}}, \quad (9. 20)$$

где \*

$$\left. \begin{aligned} Z(x) &= X(x) - iY(x); \\ X(x) &= 2xe^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt; \\ Y(x) &= \sqrt{\pi} xe^{-x^2}. \end{aligned} \right\} \quad (9. 21)$$

\* Функция  $Z(x)$  связана простым соотношением с табулированной функцией [42]  $W(x) : Z(x) = -i\sqrt{\pi} x W(x)$ .

Функция  $X(x)$  имеет следующее асимптотическое разложение:

$$X(x) = 1 + \frac{1}{2x^2} + \frac{3}{4x^4} + \dots \quad (9.22)$$

Используя свойство функции  $\zeta(x)$

$$x\zeta(x) = 1, \quad (9.23)$$

находим:

$$kv_z \zeta(\omega - kv_z) = -1 + \omega \zeta(\omega - kv_z); \quad (9.24)$$

$$k^2 v_z^2 \zeta(\omega - kv_z) = \omega^2 \zeta(\omega - kv_z) - \omega - kv_z. \quad (9.25)$$

Учитывая разложение (9.22), а также то, что  $\langle v_z \rangle = 0$  для максвелловского распределения и  $\langle v_z \rangle = v_0$  в пучке, находим окончательно для изотропной плазмы:

$$\varepsilon_{\perp} = 1 - \sum \frac{\omega_0^2}{\omega^2} Z\left(\frac{\omega}{kv_T}\right); \quad (9.26)$$

$$\varepsilon_{\parallel} = 1 - \sum \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \frac{2\omega^2}{k^2 v_T^2} \left[ Z\left(\frac{\omega}{kv_T}\right) - 1 \right]. \quad (9.27)$$

При  $\omega \gg kv_T$ , согласно разложению (9.22), имеем:

$$\varepsilon_{\perp} = 1 - \sum \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \left( 1 + \frac{k^2 v_T^2}{2\omega^2} + \frac{3}{4} \frac{k^4 v_T^4}{\omega^4} + \dots - i\sqrt{\pi} \frac{\omega}{kv_T} e^{-\frac{\omega^2}{k^2 v_T^2}} \right); \quad (9.26a)$$

$$\varepsilon_{\parallel} = 1 - \sum \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \left( 1 + \frac{3}{2} \frac{k^2 v_T^2}{\omega^2} + \frac{15}{4} \frac{k^4 v_T^4}{\omega^4} + \dots - i2\sqrt{\pi} \frac{\omega^3}{k^3 v_T^3} e^{-\frac{\omega^2}{k^2 v_T^2}} \right). \quad (9.27a)$$

При  $\omega \ll kv_T$

$$\varepsilon_{\perp} = i\sqrt{\pi} \sum \frac{\omega_0^2}{\omega kv_T}; \quad (9.26b)$$

$$\varepsilon_{\parallel} = 1 + \sum \frac{2\omega_0^2}{k^2 v_T^2} \left( 1 + i\sqrt{\pi} \frac{\omega}{kv_T} \right). \quad (9.27b)$$

Заметим, что в мнимые части  $\varepsilon_{\parallel}$  и  $\varepsilon_{\perp}$  входят нечетные степени модуля волнового числа. Следовательно, электрическая проницаемость не является аналитической функцией  $k$ .

Для пучка

$$\varepsilon_{\parallel} = 1 - \sum \frac{\omega_0}{\omega^2} \frac{2\omega^3}{k^2 v_T^2} \left[ Z \left( \frac{\omega - kv_0}{kv_T} \right) - 1 \right]. \quad (9.28)$$

Рассмотрим теперь тензор  $\varepsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega)$  для плазмы в магнитном поле в системе координат, где  $\mathbf{B}_0 = \{0, 0, B_0\}$ , а  $\mathbf{k} = \{k_x, 0, k_z\}$ . В отсутствие взаимодействия между зарядами функция распределения в невозмущенной однородной плазме является функцией от поперечной  $\varepsilon_{\perp}$  и продольной  $\varepsilon_{\parallel}$  энергий частиц:

$$F_0 = F_0(\varepsilon_{\perp}, \varepsilon_{\parallel}). \quad (9.29)$$

При этом  $x$ - и  $y$ -компоненты выражения, стоящего в квадратных скобках в уравнении (9. 10), имеют вид (выписываем  $x$ -компоненту)

$$v_x \left( 1 - \frac{k_z v_z}{\omega} \right) \left( \frac{\partial F_0}{\partial \varepsilon_{\perp}} - \frac{\partial F_0}{\partial \varepsilon_{\parallel}} \right) + v_x \frac{\partial F_0}{\partial \varepsilon_{\parallel}}. \quad (9.30)$$

Добавляя и вычитая член  $v_x \frac{n\omega_B}{\omega} \left( \frac{\partial F_0}{\partial \varepsilon_{\perp}} - \frac{\partial F_0}{\partial \varepsilon_{\parallel}} \right)$ , получим это выражение в виде

$$v_x \left\{ F_1 + \frac{\omega - k_z v_z - n\omega_B}{\omega} F_2 \right\}, \quad (9.31)$$

где

$$F_1 = \frac{\partial F_0}{\partial \varepsilon_{\parallel}} + \frac{n\omega_B}{\omega} \left( \frac{\partial F_0}{\partial \varepsilon_{\perp}} - \frac{\partial F_0}{\partial \varepsilon_{\parallel}} \right); \quad (9.32)$$

$$F_2 = \frac{\partial F_0}{\partial \varepsilon_{\perp}} - \frac{\partial F_0}{\partial \varepsilon_{\parallel}}. \quad (9.33)$$

Дальнейшие расчеты аналогичны расчетам корреляционной функции (§ 8), за тем исключением, что интегрирование по  $t$  производится теперь от 0 до  $\infty$ , так что вместо  $\delta$ -функции (8. 34) получается, согласно выражению (9. 14),  $\frac{i}{2\pi} \zeta(\omega - k_z v_z - n\omega_B)$ . Аналогично преобразуются компоненты тензора  $\varepsilon_{\alpha\beta}$  при  $\beta = z$ . Пользуясь далее соотношением (8. 33), получим\* после

---

\* Если  $F_0 = \text{const}$  e  $-\frac{\varepsilon_{\perp}}{T_{\perp}} - \frac{\varepsilon_{\parallel}}{T_{\parallel}}$ , то в формулах (9. 34) можно произвести интегрирование. Соответствующие формулы при  $T_{\perp} = T_{\parallel}$  приведены в работе «Колебания неоднородной плазмы», написанной А. Б. Михайловским (см. стр. 148). Выражения для  $\varepsilon_{\alpha\beta}$  в интегральной форме, удобной для исследования высокочастотных колебаний ( $\omega \gg \omega_B$ ), имеются в работах [21, 43].

несложных вычислений, которые здесь опущены, тензор  $\epsilon_{\alpha\beta}$  в виде

$$\left. \begin{aligned}
 \epsilon_{xx}^0 &= 1 + \sum \frac{4\pi e^2 n}{\omega} \int dp \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \zeta_n F_1 + \frac{1}{\omega} F_2 \right) \frac{n^2 \omega_B^2}{k_{\perp}^2} J_n^2; \\
 \epsilon_{xy}^0 &= -\epsilon_{yx}^0 = -i \sum \frac{4\pi e^2 n}{\omega} \int dp \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \zeta_n F_1 + \frac{1}{\omega} F_2 \right) \times \\
 &\quad \times \frac{n \omega_B v_{\perp}}{k_{\perp}} J_n J_n'; \\
 \epsilon_{yy}^0 &= 1 + \sum \frac{4\pi e^2 n}{\omega} \int dp \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \zeta_n F_1 + \frac{1}{\omega} F_2 \right) v_{\perp}^2 J_n'^2; \\
 \epsilon_{xz}^0 &= \epsilon_{zx}^0 = \sum \frac{4\pi e^2 n}{\omega} \int dp \sum_{n=-\infty}^{\infty} v_z \zeta_n F_1 \frac{n \omega_B}{k_{\perp}} J_n^2; \\
 \epsilon_{yz}^0 &= -\epsilon_{zy}^0 = i \sum \frac{4\pi e^2 n}{\omega} \int dp \sum_{n=-\infty}^{\infty} v_z \zeta_n F_1 v_{\perp} J_n J_n'; \\
 \epsilon_{zz}^0 &= 1 + \sum \frac{4\pi e^2 n}{\omega} \int dp \sum_{n=-\infty}^{\infty} v_z^2 \zeta_n F_1 J_n^2.
 \end{aligned} \right\} (9.34)$$

Здесь  $J_n \equiv J_n \left( \frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega_B} \right)$  — функция Бесселя,  $\zeta_n \equiv \zeta(\omega - n\omega_B - k_z v_z)$ . При максвелловском распределении  $F_2$  обращается в нуль, а  $F_1 = -F_0/T$ .

Входящие в подынтегральные выражения антиэрмитовских компонент тензора  $\epsilon_{\alpha\beta}$   $\delta$ -функции показывают, какие частицы участвуют в поглощении (или раскачке) волны. Как видно, условие обращения аргументов  $\delta$ -функций в нуль совпадает с рассмотренными выше (§ 4) условиями резонансов. Относительный вклад того или иного резонанса определяется множителями  $\delta$ -функций.

Эти множители содержат функции Бесселя с аргументом  $\frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega_B}$ , равным отношению длины ларморовской окружности  $\frac{2\pi v_{\perp}}{\omega_B}$  к поперечной (по отношению к магнитному полю) длине волны  $\lambda = \frac{2\pi}{k_{\perp}}$ . Для больших длин волн аргумент функций Бесселя мал,

так что можно положить  $J_n(x) = \frac{1}{n!} \left( \frac{x}{2} \right)^n$ . При  $x = \frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega_B} < 1$  роль резонансов на обертонах ( $n = \pm 2, \pm 3 \dots$ ) уменьшается

с возрастанием  $n$ . Для коротких длин волн  $\left(\frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega_B} > 1\right)$  преобладающую роль могут играть, однако, обертоны и с  $n \gg 1$ .

При продольном распространении ( $k_{\perp} = 0$ ) аргумент функций Бесселя обращается в нуль, и компоненты  $\epsilon_{xz} = \epsilon_{zx}$  и  $\epsilon_{yz} = -\epsilon_{zy}$  исчезают. Тензор  $\epsilon_{\alpha\beta}$  принимает вид

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \epsilon & ig & 0 \\ -ig & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \eta \end{pmatrix}, \quad (9.35)$$

причем в  $\epsilon$  и  $g$  отличны от нуля только члены с  $n = \pm 1$ , а в  $\eta$  — слагаемое с  $n = 0$ . При максвелловском распределении с различными температурами вдоль и поперек магнитного поля  $T_{\parallel}^*$  и  $T_{\perp}$  квадрат показателя преломления поперечных волн с круговой поляризацией равен ( $v_{\parallel} = \sqrt{2T_{\parallel}/m}$ ):

$$N^2 = \epsilon \pm g = 1 - \sum \frac{\omega_0^2}{\omega} \left\{ \frac{1}{\omega \mp \omega_B} Z\left(\frac{\omega \mp \omega_B}{k_z v_{\parallel}}\right) \left[ \frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} \pm \frac{\omega_B}{\omega} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left(1 - \frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}}\right) \right] + \frac{1}{\omega} \left(1 - \frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}}\right) \right\}. \quad (9.36)$$

Дисперсионное уравнение для продольных волн

$$\eta = 1 - \sum \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \frac{2\omega^2}{k_z^2 v_{\parallel}^2} \left\{ Z\left(\frac{\omega}{k_z v_{\parallel}}\right) - 1 \right\} = 0 \quad (9.37)$$

при  $k_{\perp} = 0$  совпадает с дисперсионным уравнением  $\epsilon_{\parallel} = 0$  в отсутствие магнитного поля.

При косом распространении волн сохраняются резонансные члены и с  $|n| > 1$ . Для колебаний с длиной волны, намного превышающей средний радиус ларморовской окружности  $\left(\frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega_B} \ll 1\right)$ , существенными будут опять-таки члены с  $n = 0$  и  $n = \pm 1$ . Выпишем компоненты  $\epsilon_{\alpha\beta}$  в предположении  $\frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega_B} \ll 1$ , сохраняя только члены с  $n = 0$  и  $n = \pm 1$ :

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{xx}^0 &= 1 - \sum \frac{\omega_0^2}{\omega} \frac{1}{2} \left\langle \zeta(\omega - \omega_B - k_z v_z) + \right. \\ &\quad \left. + \zeta(\omega + \omega_B - k_z v_z) \right\rangle; \\ \epsilon_{xy}^0 &= -\epsilon_{yx}^0 = i \sum \frac{\omega_0^2}{\omega} \frac{1}{2} \left\langle \zeta(\omega - \omega_B - k_z v_z) - \right. \\ &\quad \left. - \zeta(\omega + \omega_B - k_z v_z) \right\rangle; \\ \epsilon_{yy}^0 &= \epsilon_{xx}^0 - \sum \frac{\omega_0^2}{\omega} \frac{2k_{\perp}^2 T}{m\omega_B^2} \left\langle \zeta(\omega - k_z v_z) \right\rangle; \end{aligned} \right\} \quad (9.38)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \varepsilon_{xz}^0 = \varepsilon_{zx}^0 = - \sum \frac{\omega_0^2}{\omega} \frac{1}{2} \left\langle \frac{k_{\perp} v_z}{\omega_B} \left\{ \zeta(\omega - \omega_B - k_z v_z) - \right. \right. \\
 \left. \left. - \zeta(\omega + \omega_B - k_z v_z) \right\} \right\rangle; \\
 \varepsilon_{yz}^0 = - \varepsilon_{zy}^0 = \sum i \frac{\omega_0^2}{\omega} \left\langle \frac{k_{\perp} v_z}{\omega_B} \left\{ \zeta(\omega - k_z v_z) - \right. \right. \\
 \left. \left. - \frac{1}{2} \left[ \zeta(\omega - \omega_B - k_z v_z) + \zeta(\omega + \omega_B - k_z v_z) \right] \right\} \right\rangle; \\
 \varepsilon_{zz}^0 = 1 - \sum \frac{\omega_0^2}{\omega} \left\langle \frac{m v_z^2}{T} \zeta(\omega - k_z v_z) \right\rangle.
 \end{aligned} \right\} (9.38)$$

**Задача.** Найти связь фурье-компоненты поправки функции распределения  $f^{(1)}$  с электрическим полем  $E(\mathbf{k}, \omega)$  в плазме без магнитного поля в нерелятивистском случае.

**Решение.** Подставляя в выражение (9.5)  $E(\mathbf{r}, t) = E(\mathbf{k}, \omega) e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}$  и выделяя перед интегралом множитель  $e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}$ , получим, учитывая закон движения (9.3)  $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}t$ :

$$f^{(1)} = -e \frac{\partial F_0}{\partial \mathbf{p}} E(\mathbf{k}, \omega) e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} \int_{-\infty}^t e^{i(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})(t-t')} dt' = f^{(1)}(\mathbf{k}, \omega) e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}.$$

Используя соотношения (9.9) и (9.14), получим отсюда

$$f^{(1)}(\mathbf{k}, \omega) = g(\mathbf{k}, \omega) E(\mathbf{k}, \omega),$$

где

$$g(\mathbf{k}, \omega) = -ie \frac{\partial F_0}{\partial \mathbf{p}} \zeta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) = -e\pi \frac{\partial F_0}{\partial \mathbf{p}} \left\{ \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) + \frac{i}{\pi} \frac{P}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} \right\}.$$

## § 10. Колебания плазмы в магнитном поле с учетом теплового движения зарядов при $V_0 = 0$

В настоящем параграфе будет кратко рассмотрено влияние теплового движения зарядов на колебания плазмы в том случае, когда взаимодействием между зарядами можно пренебречь. Выше уже был произведен учет теплового движения для продольных электронных колебаний. Были найдены частота колебаний и декремент затухания, вызванного попаданием группы зарядов в резонанс с волной. Было отмечено также, что, в отличие от продольных, поперечные колебания в плазме без магнитного поля не затухают, так как их фазовая скорость всегда больше скорости зарядов, и следовательно, резонансные условия не могут осуществиться.

Рассмотрим теперь другие ветви колебаний. Возьмем сначала плазму без магнитного поля. Кроме рассмотренной ветви электронных колебаний, здесь имеется, как мы знаем, ионная ветвь низкочастотных колебаний, соответствующая звуковым колебаниям обычной жидкости. При получении этой ветви в § 2 мы пренебрегли

инерцией электронов  $-imn\omega v$  по сравнению с градиентом электронного давления  $-\nabla p^{(1)}$ . Воспользуемся и теперь этим условием, имеющим вид

$$\omega \ll kv_{Te}. \quad (10.1)$$

В выражении (9.27) для  $\varepsilon_{\parallel}$  электронное слагаемое при этом сильно упрощается, поскольку  $Z\left(\frac{\omega}{kv_{Te}}\right) \approx -i\sqrt{\pi}\frac{\omega}{kv_{Te}}$ . Дисперсионное уравнение принимает вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\parallel} = 1 + \frac{4\pi z^2 e^2 n_i}{k^2 z T_e} \left(1 + i\sqrt{\pi}\frac{\omega}{kv_{Te}}\right) + \frac{4\pi z^2 e n_i}{k^2 T_i} \times \\ \times \left\{1 - Z\left(\frac{\omega}{kv_{Ti}}\right)\right\} = 0. \end{aligned} \quad (10.2)$$

При  $\omega/kv_{Ti} \sim 1$  мнимая часть в дисперсионном уравнении сравнима по величине с действительной частью. Это значит, что такие колебания сильно затухают. Причина этого ясна. Условие  $\omega \sim kv_{Ti}$  означает, что преобладающая часть ионов имеет скорости, сравнимые с фазовой скоростью волн, и потому все они участвуют в поглощении. Колебания возможны только, если  $\omega/kv_{Ti} \gg 1$ . В этом случае в поглощение дают вклад ионы, движущиеся со скоростью много большей тепловой ( $v = \frac{\omega}{k} \gg v_{Ti}$ ), т. е. ионы из хвоста максвелловского распределения. Используя разложение функции  $Z\left(\frac{\omega}{kv_{Ti}}\right)$  при больших аргументах, получим

$$\begin{aligned} \omega^2 = \frac{k^2 z T_e}{m_i} \frac{1 + \frac{3k^2 T_i}{m_i \omega^2}}{1 + \frac{k^2 z T_e}{4\pi z^2 e^2 n_i}} - i\sqrt{\pi}\frac{\omega^3}{kv_{Ti}} \frac{\sqrt{\frac{T_i}{z T_e}}}{1 + \frac{k^2 z T_e}{4\pi z^2 e^2 n_i}} \times \\ \times \left\{ \sqrt{\frac{m_e z}{m_i}} + \left(\frac{z T_e}{T_i}\right)^{3/2} e^{-\frac{\omega^2}{k^2 v_{Ti}^2}} \right\}. \end{aligned} \quad (10.3)$$

Рассмотрим сначала колебания с длиной волны, большей «электронного дебаевского радиуса»:

$$\frac{k^2 z T_e}{4\pi z^2 e^2 n_i} \ll 1. \quad (10.4)$$

Полагая  $\omega = \omega_1 - i\omega_2$ , находим ( $\omega_2 \ll \omega_1$ ):

$$\begin{aligned} \omega_1^2 = \frac{k^2 z T_e}{m_i} \left(1 + \frac{3T_i}{z T_e}\right); \\ \omega_2 = \sqrt{\frac{\pi}{8}} k \sqrt{\frac{z T_e}{m_i}} \left\{ \sqrt{\frac{m_e z}{m_i}} + \left(\frac{z T_e}{T_i}\right)^{3/2} e^{-\frac{z T_e}{2 T_i}} \right\} \end{aligned} \quad (10.5)$$

Условие применимости этих формул  $\omega \gg kv_{Ti}$  означает, что электронное давление должно быть значительно больше ионного, т. е.

$$zT_e \gg T_i. \quad (10.6)$$

Благодаря этому условию фазовая скорость колебаний оказывается больше средней скорости движения ионов. Заметим, что наряду с ионами из хвоста распределения Максвелла, число кото-

рых пропорционально  $f_i \sim \left(\frac{m_i}{T_i}\right)^{1/2} e^{-\frac{zT_e}{2T_i}}$ , в поглощении уча-

ствуют медленные электроны (из максимума распределения Максвелла), число которых пропорционально величине  $f_e \sim \left(\frac{m_e}{T_e}\right)^{1/2}$ .

Поглощение зависит от величины плотности тока. Учитывая, что средняя скорость зарядов в волне обратно пропорциональна давлению  $\bar{v}_e \sim \frac{1}{zT_e}$ ,  $\bar{v}_i \sim \frac{1}{T_i}$ , получим отношение энергии, поглощаемой ионами, к энергии, поглощаемой электронами:

$$\left(\frac{m_i T_e}{m_e T_i}\right)^{1/2} \frac{zT_e}{T_i} e^{-\frac{zT_e}{2T_i}}. \quad (10.7)$$

Поскольку величина поглощаемой энергии пропорциональна мнимой части частоты  $\omega_2$ , то естественно, что таково же отношение второго слагаемого в  $\omega_2$ , связанного с ионами, к первому, обусловленному электронами.

В случае коротких волн

$$\frac{k^2 z T_e}{4\pi z^2 e^2 n_i} \gg 1, \quad (10.8)$$

когда становятся существенными колебания объемного заряда, решение дисперсионного уравнения имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} \omega_1^2 &= \frac{4\pi z^2 e^2 n_i}{m_i} \left(1 + \frac{3k^2 T_i}{4\pi z^2 e^2 n_i}\right); \\ \omega_2 &= \sqrt{\frac{\pi}{8}} \left(\frac{4\pi z^2 e^2 n_i}{m_i}\right)^{1/2} \left(\frac{4\pi z^2 e^2 n_i}{k^2 z T_e}\right)^{3/2} \times \\ &\times \left\{ \sqrt{\frac{m_e z}{m_i} + \left(\frac{z T_e}{T_i}\right)^{3/2} e^{-\frac{2\pi z^2 e^2 n_i}{k^2 T_i}}} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (10.9)$$

Условия применимости (10.8) и  $\omega \gg kv_{Ti}$  (слабое затухание) дают

$$k^2 T_i \ll 4\pi z^2 e^2 n_i \ll k^2 z T_e. \quad (10.10)$$

Таким образом, ионные «ленгмюровские» колебания возможны, как и звуковые, только при большом различии электронной и ионной температур.



Подытожим кратко результаты исследования колебаний изотропной плазмы, в которой столкновениями зарядов можно пренебречь. В такой плазме возможны:

а) поперечные незатухающие колебания с частотой выше ленгмюровской

$$\omega^2 = \omega_{0e}^2 + k^2 c^2; \quad (10. 11)$$

б) продольные электронные колебания вблизи ленгмюровской частоты

$$\omega^2 = \omega_{0e}^2 + \frac{3k^2 T_e}{m_e}; \quad \frac{3k^2 T_e}{m_e} \ll \omega_{0e}^2; \quad (10. 12)$$

в) продольные ионные колебания; в области длинных волн это «звук», в области коротких — колебания плотности заряда с «ленгмюровской» ионной частотой:

$$\left. \begin{aligned} \omega^2 &= \frac{k^2 z T_e}{m_i}; \quad \frac{k^2 z T_e}{4\pi z^2 e^2 n_i} \ll 1; \\ \omega^2 &= \omega_{0i}^2 + \frac{3k^2 T_i}{m_i}; \quad \frac{k^2 z T_e}{4\pi z^2 e^2 n_i} \gg 1. \end{aligned} \right\} \quad (10. 13)$$

Условие существования этих колебаний

$$z T_e \gg T_i. \quad (10. 14)$$

### § 11. Колебания плазмы в магнитном поле с учетом теплового движения зарядов при $\mathbf{V}_0 \neq 0$

При наличии магнитного поля в плазме заряды участвуют в поглощении при условии:

$$\left. \begin{aligned} \omega - n\omega_B - k_z v_z &= 0; \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ \omega_B &= \omega_B^0 \sqrt{1 - \beta^2}; \quad \beta = v/c. \end{aligned} \right\} \quad (11. 1)$$

Условие (11. 1) есть не что иное, как формула допллер-эффекта, связывающая частоту излучателя  $n\omega_B^0$  в системе покоя с частотой  $\omega$ , наблюдаемой в «лабораторной» системе координат. Если  $n < 0$ , то говорят об «аномальном» допллер-эффекте. Считая  $\omega > 0$ , найдем частоту  $\omega$ , при которой заряд, движущийся со скоростью  $v_z$  вдоль силовой линии, попадает вследствие допллер-эффекта в резонанс с волной. При нормальном допллер-эффекте ( $n > 0$ )

$$\omega = \frac{n\omega_B}{1 - \beta_z N \cos \theta}. \quad (11. 2)$$

Нормальный допллер-эффект имеет место при условии

$$\beta_z N \cos \theta < 1. \quad (11. 3)$$

Аномальный доплер-эффект ( $n < 0$ ) дает

$$\omega = \frac{|n| \omega_B}{\beta_z N \cos \theta - 1}. \quad (11.4)$$

Он возможен только для «сверхсветового» движения заряда:

$$\beta_z N \cos \theta > 1, \quad (11.5)$$

т. е. в области, где  $N \gg 1$ . При  $n \neq 0$  поглощение можно назвать циклотронным, при  $n = 0$  — черенковским, так как в этом случае условие поглощения  $\omega - k_z v_z = 0$  совпадает с условием черенковского излучения заряда, движущегося с постоянной скоростью вдоль оси  $z$ .

При максвелловском распределении зарядов по скоростям число зарядов, участвующих в поглощении, пропорционально экспоненте  $e^{-\frac{mv_z^2}{2T}}$ . С учетом условия (11. 1):

$$e^{-\frac{mv_z^2}{2T}} = e^{-\frac{m(\omega - n\omega_B)^2}{2k_z^2 T}} = e^{-\frac{(\omega - n\omega_B)^2}{\omega^2 \beta^2 N^2 \cos^2 \theta}}; \quad \beta^2 = \frac{2T}{mc^2}. \quad (11.6)$$

Это выражение справедливо, если можно пренебречь зависимостью  $\omega_B$  от  $\beta$  («релятивистский» доплер-эффект). Релятивистский доплер-эффект сравнивается с обычным при  $k_z v_z \sim \omega \beta^2$ , т. е. при  $\cos \theta \approx \beta/N$ . Если  $\beta/N \ll 1$ , то область, в которой следует учитывать релятивистский доплер-эффект, весьма узка:

$$\left| \frac{\pi}{2} - \theta \right| < \left| \frac{\beta}{N} \right|. \quad (11.7)$$

В данном разделе мы не будем подробно касаться этой области. Следует отметить также, что поскольку  $v_z < c$ , то поглощение имеет место лишь при выполнении условия

$$\left| \frac{\omega - n\omega_B}{k_z} \right| < c. \quad (11.8)$$

Как видно из выражения (11. 6), в области, где  $\beta N \cos \theta > 1$ , весьма широка область циклотронного поглощения ( $n \neq 0$ ). При этом же условии существенно черенковское поглощение.

Для выявления областей поглощения можно в качестве оценки взять  $N^2$  для холодной плазмы. Из рассмотрения кривых (см. рис. 6) квадрата показателя преломления (3. 10) становится ясно, что черенковское поглощение происходит на электронной части ветви  $B$  ( $\omega_{Bi} \ll \omega < \omega_{Be}$ ) при условии  $\omega_{0e}^2 / \omega_{Be}^2 \gg 1$ , когда  $N^2 \gg 1$ . Черенковское поглощение наблюдается также на низкочастотных ( $\omega \ll \omega_{Bi}$ ) частях ветвей  $B$ ,  $M$ . Это поглощение приводит к затуханию магнитозвуковых волн даже в отсутствие столкновений между зарядами. На ветви  $A$ , как мы увидим ниже,

черенковского поглощения нет. Наконец, черенковское поглощение существенно также вблизи частоты  $\omega_2^\infty$  на ветви  $E_m$ . Однако здесь область частот, где  $N^2 \gg 1$ , сравнительно невелика.

Сделаем еще одно замечание относительно области, примыкающей к частотам  $\omega_{1, 2, 3}^\infty$ . При  $\omega = \omega^\infty$  в холодной плазме  $N^2 = \infty$ , что соответствует нулевой фазовой скорости волны. При учете теплового движения фазовая скорость волн при  $\omega = \omega^\infty$  становится конечной, но значительно меньшей скорости света  $c$ . Поэтому в области  $\omega \gtrsim \omega^\infty$  колебания сильно затухают.

Рассмотрим более детально области черенковского поглощения. Исследуем сначала затухание магнитогидродинамических волн. Как и для низкочастотных колебаний при  $B_0 = 0$ , будем предполагать выполненным условие  $\omega \ll kv_{Te}$ . Кроме того, магнитогидродинамические волны характеризуются условиями

$$\omega \ll \omega_{Bi}; \quad kv_{Ti} \ll \omega_{Bi}. \quad (11.9)$$

При этих условиях, как нетрудно видеть из выражений (9.38) для  $\epsilon_{\alpha\beta}$ , компонента  $\epsilon_{xz}^0 = \epsilon_{zx}^0$  мала по сравнению с остальными, и мы ею вовсе пренебрежем. Компонента  $\epsilon_{xx}^0$  не содержит слагаемого с  $n = 0$  и поэтому при  $\omega \ll \omega_{Bi}$  не содержит поправок на тепловое движение. В предположении  $\omega_{0i}^2/\omega_{Bi}^2 \gg 1$  имеем

$$\epsilon_{xx}^0 = \epsilon_1 = \frac{\omega_{0i}^2}{\omega_{Bi}^2} = \frac{c^2}{c_A^2}. \quad (11.10)$$

Компонента  $\epsilon_{xy}^0 = -\epsilon_{yx}^0$  также не изменяется существенно при учете теплового движения:  $\epsilon_{xy}^0 \approx i\epsilon_{xx}^0 \frac{\omega}{\omega_{Bi}}$  [см. выражение (9.38)]. Поскольку предполагается  $\omega \ll \omega_{Bi}$ , этой компонентой тензора также пренебрежем.

При выписывании остальных компонент, содержащих  $\zeta(\omega - k_z v_z)$  следует иметь в виду, что при  $\omega \lesssim kv_{Ti}$  мнимые части этих компонент будут сравнимы по величине с действительными. Это означает, что колебания с  $\omega \lesssim kv_{Ti}$  невозможны (они сильно затухают). Поэтому следует рассмотреть только случаи, когда

$$\omega \gg kv_{Ti}. \quad (11.11)$$

При этом условии функцию  $Z\left(\frac{\omega}{kv_{Ti}}\right)$ , появляющуюся при усреднении  $\zeta(\omega - k_z v_z)$ , следует взять в виде  $\left(v_{Ti}^2 = \frac{2T_i}{m_i}\right)$ :

$$Z\left(\frac{\omega}{kv_{Ti}}\right) = \left(1 + \frac{k_z^2 v_{Ti}^2}{2\omega^2} + \dots\right) - i\sqrt{\pi} \frac{\omega}{k_z v_{Ti}} e^{-\frac{\omega^2}{k_z^2 v_{Ti}^2}}. \quad (11.12)$$

При этом

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{yy}^0 = \varepsilon_2 &= \frac{\omega_{0i}^2}{\omega_{Bi}^2} \left\{ 1 + \frac{2k_z^2}{m_i \omega^2} \left[ i \sqrt{\pi} \frac{\omega T_i}{k_z v_{Ti}} e^{-\frac{\omega^2}{k_z^2 v_{Ti}^2}} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - T_e Z \left( \frac{\omega}{k_z v_{Te}} \right) \right] \right\}; \\ \varepsilon_{yz}^0 = if &= i \frac{\omega_{0i}^2}{\omega \omega_{Bi}} \left[ 1 - i \sqrt{\pi} \frac{\omega}{k_z v_{Ti}} e^{-\frac{\omega^2}{k_z^2 v_{Ti}^2}} - Z \left( \frac{\omega}{k_z v_{Te}} \right) \right]; \\ \varepsilon_{zz}^0 = \eta &= -\frac{\omega_{0i}^2}{\omega^2} + i \sqrt{\pi} \frac{4\pi z^2 e^2 n}{k_z^2 T_i} \frac{\omega}{k_z v_{Ti}} e^{-\frac{\omega^2}{k_z^2 v_{Ti}^2}} + \\ &\quad + \frac{4\pi z^2 e^2 n}{k_z^2 T_e} \left[ 1 - Z \left( \frac{\omega}{k_z v_{Te}} \right) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (11.13)$$

Компонента  $\eta$ , как легко видеть, примерно в  $\omega_{Bi}/\omega$  или  $\omega_{Bi}/k_z v_{Ti}$  раз больше остальных компонент (это означает малость компоненты электрического поля вдоль  $\mathbf{B}_0$ ). Благодаря этому дисперсионное соотношение сильно упрощается. Из выражений (1.26) имеем:

$$\eta_{xx} = \frac{\varepsilon_1}{\cos^2 \theta}; \quad \eta_{yy} = \varepsilon_2 - \frac{j^2}{\eta}; \quad \eta_{xy} = -\eta_{yx} = \dot{0}. \quad (11.14)$$

Согласно выражению (1.25а), дисперсионное соотношение имеет вид \*

$$N^2 = \eta_{xx} = \frac{\varepsilon_1}{\cos^2 \theta}; \quad N^2 = \eta_{yy} = \varepsilon_2 - \frac{j^2}{\eta}. \quad (11.15)$$

Первое из этих соотношений определяет альфвеновскую волну:

$$\omega^2 = k_z^2 c_A^2. \quad (11.16)$$

Черенковское поглощение здесь отсутствует. Циклотронное же поглощение, характеризующее экспонентой (при  $\omega \ll \omega_{Bi}$ )  $\frac{\omega_{Bi}^2}{k_z^2 v_{Ti}^2} = e^{-\frac{\omega_{Bi}^2}{\omega^2} \frac{c_A^2}{v_{Ti}^2}}$ , чрезвычайно мало, а при  $\omega < \omega_{Bi} \frac{c_A}{c}$ , согласно формулам (11.8) и (11.16), вообще отсутствует. Таким образом, альфвеновская волна в отсутствие столкновений затухает очень слабо.

\* Точнее  $N^2 = \eta_{xx} = \frac{\varepsilon_1}{\cos^2 \theta + \frac{\varepsilon_1}{\eta} \sin^2 \theta}$ . Это уравнение имеет боль-

шое значение в исследовании колебаний неоднородной плазмы (см. работу А. Б. Михайловского в настоящем выпуске).

Второе дисперсионное соотношение (11. 15) определяет быструю и медленную магнитозвуковые волны. Рассмотрим случай  $v_{Ti}^2 \ll \ll c_A^2$  или

$$n_i T_i \ll \frac{B_0^2}{8\pi}. \quad (11. 17)$$

Кроме того, будем считать  $v_{Te}^2 \gg c_A^2$  ( $kv_{Te} \gg \omega$ ). При условии (11. 17) гидродинамическое рассмотрение дает

$$\omega = k_z c_s; \quad \omega = kc_A.$$

Как уже указывалось, колебания возможны лишь при  $\omega \gg kv_{Ti}$ . Поэтому медленная волна ( $\omega = k_z c_s$ ) будет слабозатухающей при выполнении условия

$$zTe \gg T_i. \quad (11. 18)$$

Перепишем дисперсионное уравнение в виде

$$\eta = \frac{I^2}{\varepsilon_2 - N^2}. \quad (11. 19)$$

При  $\omega \sim kc_s$ , как нетрудно установить, правая часть мала по сравнению с каждым из слагаемых, входящих в  $\eta$ . Таким образом, приближенное дисперсионное уравнение медленных магнитозвуковых волн будет  $\eta = 0$ . Оно в точности совпадает с уравнением для ионных продольных колебаний при  $B_0 = 0$  с тем отличием, что под  $k$  теперь следует понимать  $k_z$ :

$$\omega^2 = \frac{T_e}{m_i} k_z^2 \left\{ 1 - i \frac{V\pi}{2} \left[ \sqrt{\frac{zm_e}{m_i}} + \left( \frac{zTe}{T_i} \right)^{1/2} e^{-\frac{zTe}{T_i}} \right] \right\}. \quad (11. 20)$$

Быстрая волна при сделанном предположении (11. 17) будет слабозатухающей. Затухание может быть обусловлено как ионами, так и электронами. При  $\omega/k_z v_{Te} \ll 1$  из соотношений (11. 15) и (11. 3) можно найти [20]:

$$\begin{aligned} \omega^2 = & k^2 c_A^2 + k_{\perp}^2 v_{Ti}^2 \left( 1 + \frac{T_e}{2T_i} \right) - i \frac{c_A v_{Ti} k_{\perp}^2 k}{k_z} \times \\ & \times \left[ \left( 1 + \frac{T_e}{T_i} + \frac{T_e^2}{2T_i^2} \right) \sqrt{\pi} e^{-\frac{c_A^2 k^2}{v_{Ti}^2 k_z^2}} + \frac{V\pi}{2} \left( \frac{m_e T_e}{m_i T_i} \right) \right], \quad (11. 21) \end{aligned}$$

а при  $\omega/k_z v_{Te} \gg 1$  [т. е. при углах, весьма близких к  $\pi/2$  ( $\cos \theta \ll \ll c_A/v_{Te}$ )]

$$\tilde{\omega}^2 = k^2 c_A^2 + k^2 v_{Ti}^2 \left( 1 + \frac{T_e}{T_i} \right) - ik^2 c_A v_{Ti} \left( \frac{m_e T_e}{m_i T_i} \right)^{1/2} \frac{2\sqrt{\pi} k}{k_z} e^{-\frac{c_A^2 k^2}{v_{Te}^2 k_z^2}}. \quad (11. 22)$$

Заметим, что поправки на тепловое движение к действительной части  $\omega$  несколько отличаются от соответствующих поправок, полученных в гидродинамическом приближении. Из формулы гидродинамического рассмотрения следует при  $c_A \gg v_{Ti}$ :

$$\omega^2 = (c_A^2 + c_s^2 \sin^2 \theta) k^2. \quad (11. 23)$$

Это выражение совпадает с вещественной частью  $\omega^2$ , определяемой формулой (11. 21), если в  $c_s^2 = (\gamma_e T_e + \gamma_i T_i)/m_i$  положить  $\gamma_i = 2$ ,  $\gamma_e = 1$ . Это означает, что ионы ведут себя как газ с двумя эффективными степенями свободы. Для электронов рассматриваемые колебания являются медленными, так что в каждый момент, двигаясь вдоль силовых линий, они успевают принять равновесное (больцмановское) распределение, а такому изотермическому движению как раз и соответствует  $\gamma_e = 1$ . Для колебаний (11. 22)  $\gamma_e = \gamma_i = 2$ , т. е. в волнах, идущих поперек магнитного поля, электронный газ (так же, как и ионный) имеет две эффективные степени свободы.

Рассмотрим теперь черенковское поглощение колебаний с частотами, значительно превышающими ионную циклотронную частоту. При этом мы полностью пренебрежем вкладом ионов в плотность тока. Рассмотрим ветвь  $B$  (см. рис. 6) при условии  $\omega_{0e}^2/\omega_{Be}^2 \gg 1$ , когда особенно существенно черенковское поглощение. При выполнении этого условия ветвь  $B$  для всех углов  $\theta$ , за исключением очень близких к  $\pi/2$ , описывается формулой (3. 60) «квазипродольного распространения». Для холодной плазмы

$$N^2 = \frac{\omega_{0e}^2}{\omega(\omega_{Be} \cos \theta - \omega)}. \quad (11. 24)$$

Учет теплового движения приведет к появлению мнимой части  $N^2$  и небольшим добавкам к действительной части  $N^2$ . Пренебрежем этими добавками, лишь несущественно изменяющими фазовую скорость волн, и будем интересоваться только эффектом «нулевого» порядка, вызванного тепловым движением, а именно эффектом затухания. Это значит, что тепловые поправки следует учесть только в антиэрмитовских частях тензора  $\epsilon_{\alpha\beta}$ , которые будем считать малыми, а это при черенковском механизме поглощения требует условия  $\omega \gg kv_{Te}$ .

Если частота колебаний  $\omega$  близка к циклотронной  $\omega_{Be}$ , то наряду с черенковским играет роль и циклотронное поглощение. Мы будем предполагать, что частота  $\omega$  мала по сравнению с  $\omega_{Be}$  и станем учитывать только черенковское поглощение. Практически циклотронное поглощение становится значительно меньше

черенковского при сравнении экспонент  $e^{-\frac{(\omega - \omega_B)^2}{k_z^2 v_{Te}^2}}$  и  $e^{-\frac{\omega^2}{k_z^2 v_{Te}^2}}$ , т. е. при

$$\omega \lesssim \frac{1}{2} \omega_{Be}, \quad (11. 25)$$

благодаря тому, что перед циклотронной экспонентой стоит меньший множитель, чем перед черенковской. При условии (11. 25), как вытекает из выражений (9. 38) для  $\epsilon_{\alpha\beta}$  и формул (9. 22)—(9. 25), следует учесть только мнимую часть компоненты  $\epsilon_{zz}^0$ , так как антиэрмитовские части компонент  $\epsilon_{yy}^0$  и  $\epsilon_{yz}^0$  составляют малые доли  $\frac{k^2 v_{Te}^2}{\omega \omega_{Be}}$  и  $\frac{k^4 v_{Te}^4}{\omega^2 \omega_{Be}^2}$  от  $\text{Im } \epsilon_{zz}^0$ . Таким образом, для вычисления  $N^2$  нужно исходить из тензора вида (9. 35), где

$$\epsilon = \frac{\omega_{0e}^2}{\omega_{Be}^2 - \omega^2}; \quad g = \epsilon \frac{\omega_{Be}}{\omega};$$

$$\eta = \eta_0 + i\eta_1 = -\frac{\omega_{0e}^2}{\omega^2} + i\sqrt{\pi} \frac{2\omega_{0e}^2}{\omega^2 (\beta N \cos \theta)^3} e^{-\frac{1}{\beta^2 N^2 \cos^2 \theta}}. \quad (11. 26)$$

Считая  $\eta_1 \ll \eta_0$ ,  $\epsilon$ ,  $g$ , получим в линейном приближении из выражения для  $N^2$  (3. 9):

$$N^2 = \frac{\omega_{0e}^2}{\omega (\omega_{Be} \cos \theta - \omega)} \left\{ 1 + i\sqrt{\pi} \frac{\omega^{3/2} (\omega_{Be} \cos \theta - \omega)^{1/2}}{\omega_{0e}^3} \times \right. \\ \left. \times \frac{\sin^2 \theta}{(\beta \cos \theta)^3} e^{-\frac{\omega (\omega_{Be} \cos \theta - \omega)}{\omega_{0e}^2 \beta^2 \cos^2 \theta}} \right\}. \quad (11. 27)$$

Рассмотрим теперь еще одну область, где  $N^2 \gg 1$ , и, следовательно, возможно черенковское поглощение. Это область вблизи частоты  $\omega_3^\infty$ , где колебания являются приближенно продольными. Дисперсионное уравнение продольных колебаний при наличии магнитного поля получается из условия (см. § 1)  $A = \epsilon_{zz} = 0$ , т. е.

$$\epsilon_1 \sin^2 \theta + \eta \cos^2 \theta + \xi \sin 2\theta = 0. \quad (11. 28)$$

Предположим, что  $\omega_3^\infty$  не близка к  $\omega_{Be}$ , тогда циклотронное поглощение не играет роли. Как и выше, учтем тепловые поправки только в антиэрмитовских частях  $\epsilon_{\alpha\beta}$ . При этом найдем снова  $\text{Im } \epsilon_1 \ll \text{Im } \eta$ , так что следует положить

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_1 &= 1 - \frac{\omega_{0e}^2}{\omega^2 - \omega_{Be}^2}; \quad \xi = 0; \\ \eta &= 1 - \frac{\omega_{0e}^2}{\omega^2} + 2i\omega\gamma; \quad \gamma = \frac{\sqrt{\pi} \omega_{0e}^2}{k^3 v_{Te}^3 \cos \theta} e^{-\frac{\omega^2}{k^2 v_{Te}^2 \cos^2 \theta}}. \end{aligned} \right\} \quad (11. 29)$$

Полагая  $\omega = \omega_3^\infty - i\omega_2$ , найдем при  $\omega_3^\infty \gg \omega_2$ :

$$\omega_2 = \frac{\omega_3^{\infty 2} (\omega_3^{\infty 2} - \omega_{Be}^2)}{2\omega_3^{\infty 2} - (\omega_{0e}^2 + \omega_{Be}^2)} \gamma. \quad (11.30)$$

При  $\theta = 0$   $\omega_2^\infty = \omega_{0e}$  и  $\omega_2 = \gamma_{(\theta=0)}$  совпадает с декрементом затухания Ландау.

Рассмотрим теперь области, в которых существенно циклотронное поглощение. Из выражения  $N^2$  для холодной плазмы видно, что почти для всех углов  $\theta$ , за исключением узкого конуса

$\left| \frac{\pi}{2} - \theta \right| \lesssim \sqrt{\frac{zm_e}{m_i}}$ , показатель преломления обращается в бесконечность при  $\omega \approx \omega_{Bi}$ . Вблизи этой частоты, следовательно, должно быть довольно сильное поглощение. При условии  $k_\perp v_{Ti} \ll \ll \omega_{Bi}$  тензор  $\epsilon_{\alpha\beta}$ , как нетрудно видеть из формул (9.38), имеет такой же вид, как и для холодной плазмы, причем  $\epsilon \sim g \sim \frac{\omega_{0i}^2}{\omega_{Bi}^2}$ ,

тогда как  $\eta \sim \frac{\omega_{0i}^2}{k^2 v_{Ti}^2}$ . Поскольку  $\eta \gg \epsilon, g$ , то выражение для  $N^2$ , как и в случае холодной плазмы, определяется формулой (3.55):

$$N^2 = \frac{\epsilon (1 + \cos^2 \theta) \pm \sqrt{\epsilon^2 \sin^4 \theta + 4g^2 \cos^2 \theta}}{2 \cos^2 \theta}. \quad (11.31)$$

Полагая

$$\left. \begin{aligned} \epsilon &= \epsilon_0 + i\epsilon_1; & g &= g_0 + ig_1; \\ \epsilon_0 &= \frac{\omega_{0i}^2}{\omega_{Bi}^2 - \omega^2}; & g_0 &= \frac{\omega_{0i}^2}{\omega_{Bi}^2 - \omega^2} \frac{\omega}{\omega_{Bi}}; \\ \epsilon_1 &= g_1 = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\omega_{0i}^2}{\omega^2 \beta N \cos \theta} \exp \left\{ - \left( \frac{\omega_{Bi} - \omega}{\omega \beta N \cos \theta} \right)^2 \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (11.32)$$

получим показатель преломления в виде  $N = p (1 + i\kappa)$ , ( $\kappa \ll 1$ ), причем

$$p^2 = \frac{\omega_{0i}^2}{\omega_{Bi}^2} \frac{2}{1 + \cos^2 \theta \mp \sqrt{1 + 2 \left( 2 \frac{\omega^2}{\omega_{Bi}^2} - 1 \right) \cos^2 \theta + \cos^4 \theta}}; \quad (11.33)$$

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{\sqrt{\pi}}{4\beta} \frac{\omega_{0i}^2}{\omega^2 p^3 \cos \theta} e^{-\left( \frac{\omega_{Bi} - \omega}{\omega \beta p \cos \theta} \right)^2} \times \\ &\times \frac{(1 + \cos^2 \theta) \sqrt{\omega_{Bi}^2 \sin^4 \theta + 4\omega^2 \cos^2 \theta} \pm (\omega_{Bi} \sin^4 \theta + 4\omega \cos^2 \theta)}{2 \cos^2 \theta \sqrt{\omega_{Bi}^2 \sin^4 \theta + 4\omega^2 \cos^2 \theta}}. \end{aligned} \quad (11.34)$$



Поглощение при циклотронном электронном резонансе рассмотрим для простейшего случая продольного распространения. Согласно формуле (9. 36)

$$N^2 = \varepsilon \pm g = 1 - \frac{\omega_{0e}^2}{\omega (\omega \mp \omega_{Be})} Z \left( \frac{\omega \mp \omega_{Be}}{k_z v_{Te}} \right). \quad (11. 35)$$

Ионное слагаемое при  $\omega \sim \omega_{Be}$  дает очень небольшой вклад и поэтому вовсе опущено. Беря знак плюс перед  $\omega_{Be}$ , получим  $Z \approx 1$  и

$$N^2 = 1 - \frac{\omega_{0e}^2}{\omega (\omega_{Be} + \omega)}.$$

Для другой волны (знак минус перед  $\omega_{Be}$ ) существенна мнимая часть  $N^2$ . Полагая  $N = p (1 + i\kappa)$ , получим следующие уравнения для определения  $p$  и  $\kappa$ :

$$\left. \begin{aligned} p^2 &= 1 + \frac{2c}{v_{Te}} \frac{\omega_{0e}^2}{\omega^2 p} e^{-z^2} \int_0^z e^{t^2} dt; \\ \kappa &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{c}{v_{Te}} \frac{\omega_{0e}^2}{\omega^2 p^3} e^{-z^2}; \quad z \equiv \frac{(\omega_{Be} - \omega) c}{\omega v_{Te} p}. \end{aligned} \right\} \quad (11. 36)$$

При  $\omega_{0e}^2/\omega_{Be}^2 \gg 1$  ширина полосы поглощения может быть очень большой. Так, например, при  $\omega = \frac{1}{2} \omega_{Be}$  можно положить  $p^2 = 1 + \frac{\omega_{0e}^2}{\omega (\omega_{Be} - \omega)} \approx 4 \frac{\omega_{0e}^2}{\omega_{Be}^2} = \frac{16\pi c^2 m_e n}{B_0^2}$ . При этом  $\kappa = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \times \left( \frac{B^2}{32\pi n T} \right)^{1/2} e^{-\frac{B^2}{32\pi n T}}$ . При  $8\pi n T/B_0^2 \sim 0,1$  значение  $\kappa \approx 0,1$ . Длина поглощения  $c/\omega \kappa p$  при  $B_0 = 10^4$  составляет доли сантиметра.

Циклотронное поглощение при  $\theta \neq 0$  описывается довольно громоздкими формулами, которые здесь не приводятся. Их можно найти в работе Гершмана [12].

При чисто поперечном распространении ( $\theta = \frac{\pi}{2}$ ) условие резонанса имеет вид

$$\omega - n\omega_{Be} = 0, \quad (11. 37)$$

и размазывания линии поглощения из-за движения зарядов вдоль силовых линий здесь нет. Размазывание возможно только из-за «релятивистского доплер-эффекта». Учитывая, что  $\omega_{Be} = \omega_{Be}^0 \sqrt{1 - \beta^2}$ , перепишем условие (11. 37) в виде

$$\omega = n\omega_{Be}^0 \sqrt{1 - \beta^2}. \quad (11. 38)$$

Заряд, имеющий скорость  $v = 0$ , поглощает частоту  $\omega = n\omega_{Be}^0$ . По мере увеличения скорости заряда поглощаемая частота уменьшается до нуля. Величина коэффициента поглощения пропорциональна числу зарядов, имеющих скорость  $v$ , связанную с частотой  $\omega$  соотношением (11. 38), т. е. пропорциональна экспоненте

$$e^{-\frac{m_0 c^2}{V1-\beta^2 T}} = e^{-\frac{m_0 c^2}{T} \frac{n\omega_{Be}}{\omega}}. \quad (11. 39)$$

При малых скоростях коэффициент поглощения, как это видно из выражений (9. 38) для  $\epsilon_{\alpha\beta}$ , пропорционален некоторой степени скорости заряда, так что при  $v = 0$ , где  $\omega = n\omega_{Be}^0$ , он равен

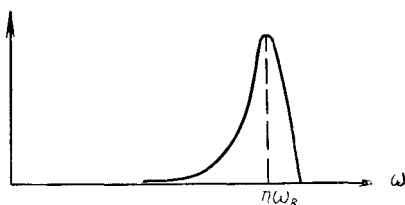


Рис. 16.

нулю, затем с увеличением  $v$  (уменьшение частоты  $\omega$ ) он растет. При  $\frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{n\omega_{Be} - \omega}{\omega} > \frac{T}{m_0 c^2}$  рост коэффициента поглощения зарезается экспонентой (11. 39). Линия поглощения оказывается примерно такой, как она изображена на рис. 16.

Из рассмотрения графиков  $N^2$  при  $\theta = \pi/2$  для холодной плазмы видно, что собственные колебания и распространение волн возможно в областях ( $N^2 > 0$ ):

$$\left. \begin{aligned} \text{а) } 0 < \omega < \omega_2^\infty &= \left( \omega_{Bi} \omega_{Be} \frac{\omega_{Bi}^2 + \omega_{0i}^2}{\omega_{Bi} \omega_{Be} + \omega_{0i}^2} \right)^{1/2}; \\ \text{б) } \sqrt{\omega_0^2 + \frac{(\omega_{Be} - \omega_{Bi})^2}{4}} - \frac{\omega_{Be} - \omega_{Bi}}{2} < \omega < \sqrt{\omega_0^2 + \omega_{Be}^2}; \\ \text{в) } &\omega > \omega_0; \\ \text{г) } \omega > \sqrt{\omega_0^2 + \frac{(\omega_{Be} + \omega_{Bi})^2}{4}} + \frac{\omega_{Be} - \omega_{Bi}}{2}. \end{aligned} \right\} (11. 40)$$

В первой области поглощение существует при частотах, совпадающих с циклотронной частотой ионов и ее обертонами,  $\omega = n\omega_{Bi}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ). Общее число резонансов в плотной плазме ( $\omega_{0i}^2 \gg \omega_{Bi} \omega_{Be}$ ) равно, примерно, корню квадратному из отношения массы иона к массе электрона:

$$n_{\text{макс}} \sim \sqrt{\frac{m_i}{zm_e}}.$$

При  $N\beta \ll 1$  поглощение на обертонах, естественно, несущественно (так же как и излучение при скорости заряда, малой по сравнению с фазовой скоростью волны). В плазме возможны, однако, условия, когда большая часть зарядов имеет скорости, сравнимые с фазовой скоростью волн ( $2T/m_i \sim c^2/N^2$ ). В рассма-

триваемой области  $N^2 \sim c^2/c_A^2$ , так что последнее условие имеет вид  $8\pi n T_i \sim B^2$ . При таких условиях максимум поглощения (и излучения) может приходиться и на частоты  $\omega = n\omega_{Be}$  с  $n \gg 1$ . Такое смещение максимума интенсивности излучения заряда, движущегося в вакууме со скоростью, близкой к скорости света, хорошо известно из теории влетающего электрона в синхротроне.

Ширина же линий поглощения зависит только от отношения средней скорости заряда к абсолютной скорости света в вакууме (а не к фазовой скорости волны, как это наблюдается в обычном доплер-эффекте при  $\theta \neq \frac{\pi}{2}$ ) и поэтому для ионов чрезвычайно мала. Таким образом, при  $\omega \gg \omega_{Bi}$  имеется большое количество сравнительно близко расположенных одна от другой узких линий поглощения, так что можно говорить о «квазинепрерывном» спектре поглощения. Практически наличие столкновений и неоднородность магнитного поля могут привести к размазыванию линий поглощения на ширину  $\Delta\omega \sim \omega_{Bi}$  так что образуется сплошная полоса поглощения.

В этом случае поглощение в области  $\theta = \frac{\pi}{2}$ ,  $\omega \gg \omega_{Bi}$  можно рассчитать следующим образом. Как уже было указано в конце § 3, при  $\omega \gg \omega_{Bi}$  можно пренебречь влиянием магнитного поля на движение ионов и рассматривать ионный газ как изотропную среду. Тензор  $\epsilon_{\alpha\beta}$  будет складываться из электронного тензора проницаемости и слагаемых, связанных со свободно двигающимися ионами. В системе координат, где ось  $z$  направлена вдоль  $\mathbf{k}$ , имеем:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \epsilon_{xx}^{\text{эл}} - \frac{4\pi z^2 e^2 n_i}{m_i \omega} \langle \zeta(\omega - k_z v_z) \rangle; \\ \epsilon_{yy} &= \epsilon_{yy}^{\text{эл}} - \frac{4\pi z^2 e^2 n_i}{m_i \omega} \langle \zeta(\omega - k_z v_z) \rangle; \\ \epsilon_{zz} &= \epsilon_{zz}^{\text{эл}} - \frac{4\pi z^2 e^2 n_i}{m_i \omega} \left\langle \frac{m_i v_z^2}{T} \zeta(\omega - k_z v_z) \right\rangle. \end{aligned} \right\} \quad (11.41)$$

В остальные компоненты  $\epsilon_{\alpha\beta}$  ионные слагаемые не входят. Очевидно, что с помощью такого тензора  $\epsilon_{\alpha\beta}$  можно рассматривать распространение колебаний и под произвольным углом  $\theta$ . При  $\theta = \frac{\pi}{2}$  уравнения для «необыкновенной» волны имеют вид (3.41) (магнитное поле направлено по оси  $x$ ):

$$\left. \begin{aligned} (N^2 - \epsilon_{yy}) E_y + igE_z - 0; \\ - igE_y - \epsilon_{zz} E_z = 0. \end{aligned} \right\} \quad (11.42)$$

Поскольку рассматриваемые частоты  $\omega \lesssim \sqrt{\omega_{Be}\omega_{Bi}}$  значительно ниже электронной циклотронной частоты, то поправки на тепловое движение в  $\epsilon_{\alpha\beta}^{\text{эл}}$  несутественны:

$$\epsilon_{yy}^{\text{эл}} = \epsilon_{zz}^{\text{эл}} \approx \frac{\omega_{0e}^2}{\omega_{Be}^2}; \quad g = \frac{\omega_{0e}^2}{\omega\omega_{Be}}. \quad (11.43)$$

Таким образом,

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{yy} &= \frac{\omega_{0e}^2}{\omega_{Be}^2} - \frac{\omega_{0i}^2}{\omega^2} Z\left(\frac{\omega}{kv_{Ti}}\right); \\ g &= \frac{\omega_{0e}^2}{\omega\omega_{Be}}; \\ \epsilon_{zz} &= \frac{\omega_{0e}^2}{\omega_{Be}^2} - \frac{\omega_{0i}^2}{\omega^2} \frac{2\omega^2}{k^2v_{Ti}^2} \left[ Z\left(\frac{\omega}{kv_{Ti}}\right) - 1 \right]. \end{aligned} \right\} \quad (11.44)$$

Будем предполагать выполненным условие  $\omega \gg kv_{Ti}$  (по порядку величины  $\frac{\omega}{k} \sim c_A$ , поэтому это условие означает, что  $\frac{c_A^2}{v_{Ti}^2} = \frac{B_0^2}{8\pi n_i T_i} \gg 1$ ). Считая мнимые части малыми и пользуясь разложением (9.22), найдем:

$$\left. \begin{aligned} N^2 &= \epsilon_{yy}^0 - \frac{g^2}{\epsilon_{zz}^0} + i\sqrt{\pi} \frac{\omega_{0i}^2}{\omega kv_{Ti}} \left[ 1 + \frac{2\omega^2}{k^2v_{Ti}^2} \left(\frac{g}{\epsilon_{zz}^0}\right)^2 \right] e^{-\frac{\omega^2}{k^2v_{Ti}^2}}; \\ \epsilon_{yy}^0 &= \frac{\omega_{0e}^2}{\omega_{Be}^2} - \frac{\omega_{0i}^2}{\omega^2} \left( 1 + \frac{k^2v_{Ti}^2}{2\omega^2} + \dots \right); \\ \epsilon_{zz}^0 &= \frac{\omega_{0e}^2}{\omega_{Be}^2} - \frac{\omega_{0i}^2}{\omega^2} \left( 1 + \frac{3}{2} \frac{k^2v_{Ti}^2}{2\omega^2} + \dots \right). \end{aligned} \right\} \quad (11.45)$$

При  $v_{Ti} = 0$  величина  $\epsilon_{zz}^0$  обращается в нуль при  $\omega = \sqrt{\omega_{Bi}\omega_{Be}}$ , соответственно  $N = \infty$ , фазовая скорость волны равна нулю. При  $\omega > \sqrt{\omega_{Be}\omega_{Bi}}$  величина  $N^2 < 0$ , и колебания при  $T_i = 0$  невозможны. При учете теплового движения, как уже отмечалось в § 3, фазовая скорость в нуль не обращается, а стремится при  $\omega \rightarrow \infty$  к тепловой скорости зарядов, но при этом имеется сильное затухание волн. При  $\omega = \sqrt{\omega_{Be}\omega_{Bi}}$  фазовая скорость волны, как вытекает из формул (11.45), равна

$$v_{\Phi} = c \left( \frac{3T_i}{m_i c^2} \right)^{1/4} \left( \frac{m_e}{m_i} \right)^{1/8}. \quad (11.46)$$

При частоте  $\omega$ , в несколько раз меньшей  $\sqrt{\omega_{Be}\omega_{Bi}}$ , тепловыми поправками в  $\text{Re}N^2$  можно пренебречь, кроме того, можно положить  $\epsilon_{yy}^0 = \epsilon_{zz}^0 = -\frac{\omega_{0i}^2}{\omega^2}$ . Поскольку  $\omega \gg \omega_{Bi}$ , то  $\epsilon_{yy}^0 \ll g^2/\epsilon_{zz}^0$ , и, следовательно,  $\text{Re}N^2 = -\frac{g^2}{\epsilon_{zz}^0} = \frac{c^2}{c_A^2}$ . Таким образом, в указанных условиях

$$N^2 = \frac{c^2}{c_A^2} + i\sqrt{\pi} \left\{ \frac{\omega_{0i}^2}{\omega^2} \frac{c_A}{v_{Ti}} + 2 \frac{c_A c^2}{v_{Ti}^3} \right\} e^{-\frac{c_A^2}{v_{Ti}^2}}. \quad (11.47)$$

Механизм поглощения ионами здесь черенковский. В области коротких (по сравнению с радиусом ларморовского кружка) волн движение ионов можно считать прямолинейным, и при  $N \gg 1$  циклотронное поглощение (и излучение) сводится к черенковскому. Первое слагаемое в  $\text{Im} N^2$ , связанное с  $\text{Im} \epsilon_{yy}$ , характеризует поглощение энергии поперечного поля волны, второе слагаемое, полученное из  $\text{Im} \epsilon_{zz}$ , описывает поглощение энергии продольной компоненты электрического поля волны.

Во второй из указанных выше (11.40) областей существования колебания при  $\omega_{0e} \gg \omega_{Be}$  можно произвести расчет таким же методом, как и для первой области. Вторая область является, однако, очень узкой  $\Delta\omega \approx \frac{\omega_{Be}^2}{\omega_{0e}}$ . Формула (11.45) здесь применима, если вместо  $\omega_{0i}$  и  $v_{Ti}$  подставить соответственно  $\omega_{0e}$  и  $v_{Te}$ , а вместо  $\epsilon_{yy}^0$ ,  $\epsilon_{zz}^0$  и  $g$  подставить следующие величины:

$$\begin{aligned} \epsilon_{yy}^0 &= 1 - \frac{\omega_{0e}^2}{\omega^2} \left( 1 + \frac{k^2 v_{Te}^2}{\omega^2} \right); \\ \epsilon_{zz}^0 &= 1 - \frac{\omega_{0e}}{\omega^2} \left( 1 + \frac{3}{2} \frac{k^2 v_{Te}^2}{\omega^2} \right); \\ g &= \frac{\omega_{0e}^2 \omega_{Be}}{\omega^3}. \end{aligned}$$

В холодной плазме фазовая скорость равна нулю при  $\omega = \sqrt{\omega_{0e}^2 + \omega_{Be}^2} \approx \omega_{0e}$ . При учете теплового движения в этой точке

$$v_\phi = c \left( \frac{12\pi n T_e}{B_0^2} \right)^{1/4}.$$

При черенковском механизме поглощения должно быть  $v_\phi < c$ . Таким образом, поглощение имеется лишь при условии  $12\pi n T_e/B_0^2 \ll 1$ .

В третьей и четвертой областях существования колебаний показатель преломления близок к единице, фазовую скорость можно принять всюду равной  $c$ . Эта область сравнительно высоких частот ( $\omega > \omega_B, \omega_0$ ) существенна в задаче определения потерь энергии в высокотемпературной плазме вследствие излучения электронов на обертонах циклотронной частоты. Подробнее этот вопрос будет освещен в следующих выпусках.

## § 12. Потери энергии при движении заряда в плазме

При движении заряда в среде возникает электромагнитное поле. Если закон движения заряда считать заданным, то создаваемое им поле определяется формулами (6. 40) и (6. 51). Это поле, очевидно, в свою очередь воздействует на заряд, изменяя закон его движения. Сила, с которой электромагнитное поле, создаваемое движущимся зарядом, действует на заряд, называется, как известно, силой лучистого трения. Работа этой силы отрицательна, т. е. заряд теряет энергию, тормозится.

При наличии совокупности зарядов величина потери энергии единицей объема в единицу времени может быть подсчитана как взятое с обратным знаком среднее значение скалярного произведения плотности тока, создаваемого движущимися зарядами, на возникающее электрическое поле. Эта величина может быть выражена через свою спектральную плотность по аналогии с формулой (8. 22) следующим образом:

$$\overline{j_{\alpha}^{\text{стоп}}(\mathbf{r}, t) E_{\alpha}(\mathbf{r}, t)} = \int (j_{\alpha}^{\text{стоп}*} E_{\alpha})_{\mathbf{k}, \omega} d\mathbf{k} d\omega. \quad (12. 1)$$

Фурье-компоненты электрического поля  $\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega)$  и плотности тока  $j^{\text{стоп}}(\mathbf{k}, \omega)$  связаны соотношением вида

$$E_{\alpha}(\mathbf{k}, \omega) = L_{\alpha\beta} j_{\beta}^{\text{стоп}}(\mathbf{k}, \omega), \quad (12. 2)$$

где тензор  $L_{\alpha\beta}$  для изотропной и анизотропной плазмы, согласно выражениям (6. 38), (6. 39) и (6. 50), определяется формулами

$$L_{\alpha\beta} = -\frac{4\pi i}{\omega \epsilon_{\parallel}} \frac{k_{\alpha} k_{\beta}}{k^2} + \frac{4\pi i}{\omega} \frac{1}{\frac{k^2 c^2}{\omega^2} - \epsilon_{\perp}} \left( \delta_{\alpha\beta} - \frac{k_{\alpha} k_{\beta}}{k^2} \right); \quad (12. 3)$$

$$L_{\alpha\beta} = \frac{4\pi i}{\omega} \sum_{i=1}^2 \frac{a_{i\alpha} b_{i\beta}^*}{\frac{k^2 c^2}{\omega^2} - \epsilon_i(\mathbf{k}, \omega)}. \quad (12. 4)$$

Подставляя соотношение (12. 2) в выражение (12. 1) и учитывая, что  $(j_{\alpha}^{\text{стоп}*} j_{\beta}^{\text{стоп}})_{\mathbf{k}, \omega} = G_{\beta\alpha}(\mathbf{k}, \omega)$ , получаем

$$Q = -\overline{j_{\alpha}^{\text{стоп}}(\mathbf{r}, t) E_{\alpha}(\mathbf{r}, t)} = -\int G_{\beta\alpha}(\mathbf{k}, \omega) L_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega) d\mathbf{k} d\omega. \quad (12. 5)$$

Пользуясь свойством  $G_{\alpha\beta}(-\mathbf{k}, -\omega) = G_{\alpha\beta}^*(\mathbf{k}, \omega)$  и  $L_{\alpha\beta}(-\mathbf{k}, -\omega) = L_{\alpha\beta}^*(\mathbf{k}, \omega)$ , вытекающим из аналогичного свойства тензора  $\epsilon_{\alpha\beta}$  (6. 32), можно записать выражение для потерь в виде интеграла по положительным частотам:

$$Q = -2\text{Re} \int_0^{\infty} d\omega \int G_{\beta\alpha}(\mathbf{k}, \omega) L_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega) d\mathbf{k}. \quad (12. 6)$$

Поскольку тензор  $G_{\alpha\beta}$  эрмитовский, то выражение для  $Q$  можно записать также в виде

$$Q = -\int G_{\beta\alpha} L'_{\alpha\beta} d\mathbf{k} d\omega = -2 \int_0^{\infty} d\omega \int G_{\beta\alpha} L'_{\alpha\beta} d\mathbf{k}, \quad (12. 7)$$

где  $L'_{\alpha\beta} = (L_{\alpha\beta} + L_{\beta\alpha}^*)/2$  — эрмитовская часть тензора  $L_{\alpha\beta}$ . Из выражений (12. 3) и (12. 4) для  $L_{\alpha\beta}$  видно, что при эрмитовском тензоре  $\epsilon_{\alpha\beta}$  величина  $L'_{\alpha\beta} = 0$ , так что потери энергии происходят только при наличии поглощающих свойств среды.

Для получения потерь энергии, испытываемых отдельным зарядом, необходимо взять функцию распределения, входящую в выражение (8. 29) для  $G_{\alpha\beta}$ , в виде  $F(\mathbf{v}) d\mathbf{v} = \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0) d\mathbf{v}$ . В этом случае

$$G_{\alpha\beta} = nG_{\alpha\beta}^1; \quad (12. 8)$$

$$G_{\alpha\beta}^1 = \frac{e_1^2}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} v_{\alpha}(t) v_{\beta}^0 e^{i\left(\omega t - \mathbf{k} \int_0^t v(t') dt'\right)} dt. \quad (12. 9)$$

Потери энергии отдельного заряда определяются формулой

$$-\frac{dE}{dt} = -2\text{Re} \int_0^{\infty} d\omega \int G_{\beta\alpha}^1(\mathbf{k}, \omega) L_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega) d\mathbf{k}. \quad (12. 10)$$

В отсутствие магнитного поля ( $v_{\alpha}(t) = \text{const} = v_{\alpha}$ ) имеем

$$G_{\alpha\beta}^1(\mathbf{k}, \omega) = \frac{e_1^2 v_{\alpha} v_{\beta}}{(2\pi)^3} \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}). \quad (12. 11)$$

Подставляя выражения (12. 11) и (12. 3) в формулу (12. 10), получаем

$$-\frac{dE}{dt} = -\frac{e_1^2}{\pi^2} \text{Re} \int_0^{\infty} i \frac{d\omega}{\omega} \int \left\{ -\frac{(\mathbf{k}\mathbf{v})^2}{k^2 \epsilon_{\parallel}} + \frac{v^2 - \frac{(\mathbf{k}\mathbf{v})^2}{k^2}}{\omega^2 - \epsilon_{\perp}} \right\} \times \\ \times \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) d\mathbf{k}. \quad (12. 12)$$

Разбивая  $\epsilon_{\parallel}$  и  $\epsilon_{\perp}$  на действительную и мнимую части:

$$\epsilon_{\parallel} = \epsilon_{\parallel}^{(1)} + i\epsilon_{\parallel}^{(2)}; \quad \epsilon_{\perp} = \epsilon_{\perp}^{(1)} + i\epsilon_{\perp}^{(2)},$$

представим входящие в подынтегральное выражение множители, содержащие  $\varepsilon_{\parallel}$  и  $\varepsilon_{\perp}$ , в виде

$$\operatorname{Re} \left( \frac{i}{\varepsilon_{\parallel}} \right) = \frac{\varepsilon_{\parallel}^{(2)}}{|\varepsilon_{\parallel}|^2}; \quad \operatorname{Re} \left( \frac{-i}{\frac{k^2 c^2}{\omega^2} - \varepsilon_{\perp}} \right) = \frac{\varepsilon_{\perp}^{(2)}}{\left| \frac{k^2 c^2}{\omega^2} - \varepsilon_{\perp} \right|^2}. \quad (12.13)$$

Если мнимые части электрических проницаемостей исчезающе малы, то эти выражения по аналогии с формулами (9.13) можно записать соответственно в виде

$$\operatorname{Re} \left( \frac{i}{\varepsilon_{\parallel}} \right) = \pi \delta(\varepsilon_{\parallel}); \quad \operatorname{Re} \left( \frac{-i}{\frac{k^2 c^2}{\omega^2} - \varepsilon_{\perp}} \right) = \pi \delta \left( \frac{k^2 c^2}{\omega^2} - \varepsilon_{\perp} \right). \quad (12.14)$$

Как видно из выражений (9.26) и (9.27) для  $\varepsilon_{\perp}$  и  $\varepsilon_{\parallel}$ , их мнимые части будут малы при условии  $\omega \gg k v_T$ . Согласно же выражению (12.12), вклад в потери энергии дают частоты

$$\omega = k v = k v \cos \theta. \quad (12.15)$$

Следовательно, выражения (12.14) можно использовать в случае, когда скорость заряда значительно превышает среднюю тепловую скорость зарядов плазмы ( $v \gg v_T$ ).

Рассмотрим этот случай. Сначала исследуем вторую часть интеграла (12.12), соответствующую поперечным волнам. Согласно второму из соотношений (12.14),

$$k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_{\perp}}. \quad (12.16)$$

Подставляя это значение  $k$  в формулу (12.15), находим условие, при котором энергия теряется в виде поперечных волн:

$$1 = \frac{v}{c} \sqrt{\varepsilon_{\perp}} \cos \theta. \quad (12.17)$$

Это условие, называемое условием черенковского излучения, очевидно не выполняется в плазме, поскольку  $\varepsilon_{\perp} < 1$ ; следовательно, поперечные волны в холодной плазме ( $v \gg v_T$ ) не излучаются.

В среде с  $\varepsilon_{\perp} > 1$  вторая часть интеграла (12.12) имеет вид ( $\mu \equiv \cos \theta$ ):

$$-\left( \frac{dE}{dt} \right)_{\perp} = \frac{e_1^2 v}{c^2} \int_0^{\infty} \omega d\omega \int_{-1}^1 (1 - \mu^2) d\mu \int_0^{\infty} \delta \left( k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{\perp} \right) \times \\ \times \delta \left( \mu - \frac{\omega}{k v} \right) dk^2. \quad (12.18)$$



Выполняя простое интегрирование по  $k^2$  и  $\mu$ , находим

$$-\left(\frac{dE}{dt}\right)_{\perp} = \frac{e_1^2 v}{c^2} \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{c^2}{\varepsilon_{\perp} v^2}\right) \omega d\omega. \quad (12. 19)$$

Это хорошо известная формула черенковского излучения.

Исследуем теперь потери энергии в плазме, связанные с продольным полем (так называемые поляризационные потери). Учтывая, что  $\delta(\varepsilon_{\parallel}) = \delta\left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right) = \frac{\omega^3}{2\omega_0^2} \delta(\omega - \omega_0)$ , получим первую часть интеграла (12. 12) в виде

$$-\left(\frac{dE}{dt}\right)_{\parallel} = \int e_1^2 v k \mu^2 \delta\left(\mu - \frac{\omega}{kv}\right) \delta(\omega - \omega_0) dk d\mu d\omega. \quad (12. 20)$$

Выполняем сначала интегрирование по  $\omega$  и по  $\mu$ . Поскольку максимальное значение  $\mu$  равно 1, то из первой  $\delta$ -функции следует, что минимальное значение  $k$ , при котором подынтегральное выражение отлично от нуля, равно

$$k_{\text{мин}} = \frac{\omega_0}{v}. \quad (12. 21)$$

Таким образом,

$$-\left(\frac{dE}{dt}\right)_{\parallel} = \frac{e_1^2 \omega_0^2}{v} \int_{\omega_0/v}^{k_0} \frac{dk}{k} = \frac{e_1^2 \omega_0^2}{v} \ln \frac{k_0 v}{\omega_0}. \quad (12. 22)$$

Расходимость интеграла на верхнем пределе связана с тем, что большим значениям  $k$  в выражении (6. 40) для электрического поля соответствуют малые расстояния от движущегося заряда, где среду нельзя считать непрерывной. Для устранения расходимости обычно интегрирование производится до некоторого значения. В работе Ахиезера и Ситенко [44] положено  $k_0 = \frac{2}{\gamma \varrho_0}$ ;  $\gamma = 1,78 \dots$ , где  $\varrho_0$  — параметр удара, делящий взаимодействие заряда с электронами среды на парное ( $q < \varrho_0$ ) и коллективное ( $q > \varrho_0$ ). Этот параметр удовлетворяет условиям

$$a \ll \varrho_0 \ll \frac{v}{\omega_0}; \quad a = \frac{e_1 e (m_1 + m_e)}{m_1 m_e v^2}. \quad (12. 23)$$

При этих условиях теория парных соударений приводит к следующему выражению для потерь:

$$-\left(\frac{dE}{dt}\right)_{q < \varrho_0} = \frac{e_1^2 \omega_0^2}{v} \ln \frac{\varrho_0}{a}, \quad (12. 24)$$

так что суммарные потери оказываются равными

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{e_1^2 \omega_0^2}{v} \ln \frac{2v}{\gamma \omega_0 a}. \quad (12.25)$$

Ландау и Лифшиц в своей книге [25] поступают иначе, связывая верхний предел интегрирования  $k_0$  с передачей импульса  $q = \hbar k_0$  электрону среды, если эта передача импульса достаточно велика, чтобы можно было рассматривать электрон свободным\*. Согласно классической механике, передача импульса связана с параметром удара соотношением ( $q \gg a$ )

$$q = \frac{2e_1 e}{v} \frac{1}{\rho}. \quad (12.26)$$

Следовательно, формула для парных столкновений может быть переписана в виде (для определенности считаем  $m_1 \gg m_e$ )

$$-\left(\frac{dE}{dt}\right)_{q>q_0} = \frac{e_1^2 \omega_0^2}{v} \ln \frac{2m_1 v}{q_0}. \quad (12.27)$$

Суммируя ее с выражением (12.22), находим полные потери в виде

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{e_1^2 \omega_0^2}{v} \ln \frac{2m_1 v^2}{n \omega_0}. \quad (12.28)$$

Формулы (12.25) и (12.28) соответствуют хорошо известной формуле торможения Бора, полученной классическим методом, и формуле Бете, полученной квантовомеханическим методом в борновском приближении. Для получения связи между этими формулами следует более аккуратно рассмотреть коллективное взаимодействие. Будем рассматривать область  $q < q_0$  как вакуум с находящимися в нем зарядами, а область  $q > q_0$  как среду с электрической проницаемостью  $\epsilon = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}$ . Для потерь энергии в этой среде получается формула (см. задачу 1 к § 12)

$$-\left(\frac{dE}{dt}\right)_{q>q_0} = \frac{e_1^2 \omega_0^2}{v} \int_0^{k_0} \frac{J_0(k_\perp \rho_0)}{k_\perp^2 + \frac{\omega_0^2}{v^2}} k_\perp dk_\perp. \quad (12.29)$$

При  $k_0 \rho_0 \gg 1$  интегрирование можно распространять до бесконечности, тогда интеграл равен  $K_0 \left( \frac{\rho_0 \omega_0}{v} \right) \approx \ln \frac{2}{\gamma} \frac{v}{\rho_0 \omega_0}$ . Скла-

\* Из квантовой механики известно, что при взаимодействии поля вида  $e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}$  со свободным электроном электрону передается импульс  $\hbar\mathbf{k}$ .

дывая с выражением (12. 24), получим классическую формулу (12. 25). При  $k_0 \varrho_0 \ll 1$  можно положить  $J_0(k_{\perp} \varrho_0) = 1$ . Тогда интеграл равен  $\ln \frac{k_0 v}{\omega_0}$ . Складывая с формулой (12. 27), получим квантовомеханическую формулу (12. 28). Согласно формуле (12. 26)  $k_0 \varrho_0 = \frac{q_0 \varrho_0}{\hbar} = \frac{2ee_1}{\hbar v}$ . Следовательно, формула (12. 25) справедлива при  $2ee_1/\hbar v \gg 1$ , тогда как формула (12. 28) справедлива при  $2ee_1/\hbar v \ll 1$  — это хорошо известное условие борновского приближения.

Перейдем теперь к потерям энергии в плазме, находящейся в магнитном поле [45—57]. Выражение  $G_{\alpha\beta} L_{\alpha\beta}$  является инвариантом относительно поворота координатных осей, поэтому его можно вычислить, например, в системе координат  $x, y, z$ , где вектор  $B_0$  направлен по оси  $z$ , а вектор  $\mathbf{k}$  лежит в плоскости  $xz$ . Согласно выражению (8. 35), тензор  $G_{\alpha\beta}^1(\mathbf{k}, \omega)$  в этой системе координат равен

$$G_{\alpha\beta}^1(\mathbf{k}, \omega) = \frac{e_1^2}{8\pi^3} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \pi_{\alpha\beta}^{(n)} \delta(\omega - k_z v_z - n\omega_B), \quad (12. 30)$$

причем  $\pi_{\alpha\beta}^{(n)}$  есть значение  $\Pi_{\alpha\beta}^{(n)}$  при  $\kappa = 0$ :

$$\left. \begin{aligned} \pi_{xx}^{(n)} &= v_{\perp}^2 \frac{n^2}{x^2} J_n^2(x); & \pi_{xy}^{(n)} &= -\pi_{yx}^{(n)} = i v_{\perp}^2 \frac{n}{x} J_n(x) J_n'(x); \\ \pi_{yy}^{(n)} &= v_{\perp}^2 J_n'^2(x); & \pi_{yz}^{(n)} &= -\pi_{zy}^{(n)} = -i v_{\perp} v_z \frac{v_{\perp}}{x} J_n(x) J_n'(x); \\ \pi_{zz}^{(n)} &= v_z^2 J_n^2(x); & \pi_{xz}^{(n)} &= \pi_{zx}^{(n)} = v_{\perp} v_z \frac{n}{x} J_n^2(x); \\ & & x &\equiv \frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega_B}; & \omega_B &= \omega_B^0 \sqrt{1 - \beta^2}. \end{aligned} \right\} \quad (12. 31)$$

В этой же системе координат векторы поляризации  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  имеют вид:

$$\mathbf{a} = a_y \{i\alpha_x^0, 1, i\alpha_z^0\}; \quad \mathbf{b}^* = a_y \{-i\alpha_x^0, 1, -i\alpha_z^0\}. \quad (12. 32)$$

Учитывая, что  $a_y^2 = \frac{1}{1 + \alpha_x^2}$  [см. формулу (6. 55)], нетрудно получить

$$\pi_{\beta\alpha}^{(n)} a_{\alpha} b_{\beta}^* = \frac{1}{1 + \alpha_x^2} \left\{ \left( \alpha_x^0 \frac{v_{\perp} n}{x} + \alpha_z^0 v_z \right) J_n(x) + v_{\perp} J_n'(x) \right\}^2. \quad (12. 33)$$

Подставляя теперь значения  $\tilde{L}_{\alpha\beta}$  (12. 4) и  $G_{\alpha\beta}$  (12. 30) с учетом выражения (12. 33) в формулу (12. 10), находим выражение для потерь энергии зарядом, движущимся по винтовой линии:

$$-\frac{dE}{dt} = -\operatorname{Re} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{l=1}^2 \frac{e_1^2}{\pi^2} \int_0^{\infty} i \frac{d\omega}{\omega} \int \frac{dk}{1 + \alpha_{xl}^2} \times \\ \times \frac{\left\{ \left( \alpha_{xl}^0 \frac{v_{\perp n}}{x} + \alpha_{zl}^0 v_z \right) J_n + v_{\perp} J'_n \right\}^2}{\frac{k^2 c^2}{\omega^2} - \varepsilon_l(\omega, k)} \delta(\omega - kv_z \cos \theta - n\omega_B). \quad (12. 34)$$

При выводе этой формулы не предполагалось, что поглощение слабое или что плазма холодная. Поэтому в принципе по формуле (12. 34) можно определить силу торможения заряда в самом общем случае.

Мы, однако, рассмотрим формулу (12. 34) только в простейшем случае холодной плазмы. В этой формуле содержатся как потери на излучение, так и поляризационные потери, выступающие здесь как излучение продольных волн. В отсутствие магнитного поля излучения продольных волн происходит на ленгмюровской частоте  $\omega_0$ , о чем свидетельствует, например, наличие  $\delta$ -функции  $\delta(\omega - \omega_0)$  в выражении (12. 20) для поляризационных потерь. При наличии магнитного поля в холодной плазме частота продольных волн, определяемая, как мы видели в § 2, из условия  $\varepsilon_l = \infty$ , зависит от угла  $\theta$ . Расчеты здесь гораздо сложнее, и мы их производить не будем. Отметим только, что, как и в выражении (12. 22) для поляризационных потерь при  $B_0 = 0$ , в выражении (12. 34) получится расходящийся интеграл, связанный с неприменимостью используемых уравнений на малых расстояниях от заряда. Расходимость должна быть устранена указанным выше способом для случая  $B_0 = 0$ .

Отвлекаясь от поляризационных потерь, условимся не рассматривать в выражении (12. 34) области частот и углов, где  $\varepsilon_l = \infty$  и появляется расходимость. В случае холодной плазмы выражение  $\varepsilon_l = N_l^2$  не зависит от  $k$  и определяется формулой (3. 10).

Для прозрачной плазмы следует положить по аналогии с выражениями (12. 14)

$$\operatorname{Re} \frac{-i}{\frac{k^2 c^2}{\omega^2} - N_l^2} = \pi \delta \left( \frac{k^2 c^2}{\omega^2} - N_l^2 \right). \quad (12. 35)$$

Поскольку  $k^2 c^2 / \omega^2 > 0$ , то аргумент  $\delta$ -функции может обратиться в нуль только при  $N_l^2 > 0$ . Таким образом, заряд излучает лишь в той области частот и углов, где могут распространяться волны.

Производя интегрирование по  $k$  и заменяя в сумме по  $n$  от  $-\infty$  до 0  $n$  на  $-n$ , получим

$$-\frac{dE}{dt} = \sum_{l=1}^2 \int_{-1}^1 d\mu \int_0^{\infty} d\omega \frac{e_1^2 \omega^2}{c^3} \frac{N_l}{1 + \alpha_x^2} \left\{ I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (I_n + I_{-n}) \right\}; \quad (12. 36)$$

$$I_0 = (\alpha_z^0 v_z J_0 + v_{\perp} J_0')^2 \delta(\omega - \omega \beta_{\parallel} N_l \mu); \quad (12. 37)$$

$$I_n = \left[ \left( \alpha_x^0 \frac{v_{\perp} n}{x_l} + \alpha_z^0 v_z \right) J_n + v_{\perp} J_n' \right]^2 \delta(\omega - n\omega_B - \omega \beta_{\parallel} N_l \mu); \quad (12. 38)$$

$$I_{-n} = \left[ \left( \alpha_x^0 \frac{v_{\perp} n}{x_l} - \alpha_z^0 v_z \right) J_n - v_{\perp} J_n' \right]^2 \delta(\omega + n\omega_B - \omega \beta_{\parallel} N_l \mu). \quad (12. 39)$$

Здесь  $\beta_{\parallel} = v_z/c$ ; аргументом функций Бесселя является

$$x_l = \frac{\omega}{\omega_B} \frac{v_{\perp}}{c} N_l \sqrt{1 - \mu^2}. \quad (12. 40)$$

Аргументы  $\delta$ -функции показывают, что  $I_0$  определяет черенковское излучение заряда,  $I_n$  — циклотронное излучение с учетом нормального доплер-эффекта (при  $\omega_B > 0$ ),  $I_{-n}$  — циклотронное излучение с учетом аномального доплер-эффекта (это слагаемое отлично от нуля только при  $N_l \gg 1$ ). Если излучателем является электрон, то  $\omega_B < 0$ . В этом случае удобнее переписать выражения (12. 37)—(12. 39), вводя положительную циклотронную частоту  $\omega_{Be} = -\omega_B > 0$ :

$$I_0 = (\alpha_z^0 v_z J_0 - v_{\perp} J_0')^2 \delta(\omega - \omega \beta_{\parallel} N_l \mu); \quad (12. 37a)$$

$$I_n = \left[ \left( \alpha_x^0 \frac{v_{\perp} n}{x_l} + \alpha_z^0 v_z \right) J_n - v_{\perp} J_n' \right]^2 \delta(\omega - n\omega_{Be} - \omega \beta_{\parallel} N_l \mu); \quad (12. 38a)$$

$$I_{-n} = \left[ \left( \alpha_x^0 \frac{v_{\perp} n}{x_l} - \alpha_z^0 v_z \right) J_n + v_{\perp} J_n' \right]^2 \delta(\omega + n\omega_{Be} - \omega \beta_{\parallel} N_l \mu). \quad (12. 39a)$$

Здесь теперь  $x_l = \frac{\omega}{\omega_{Be}} \frac{v_{\perp}}{c} N_l \sqrt{1 - \mu^2}$ . Выражение (12. 38a) получено из выражения (12. 39), а (12. 39a) — из выражения (12. 38) путем замены  $\omega_B$  на  $-\omega_{Be}$ . Из формулы (12. 36) нетрудно получить формулу для излучения заряда в вакууме. Для этого следует учесть, что поскольку в вакууме электромагнитные волны поперечные, то  $\alpha_z = 0$ . Учитывая также, что  $\alpha_{x1} \alpha_{x2} = -1$  [см. формулу (1. 32)], из формул преобразования (6. 57), полагая  $\alpha_{x1} = \alpha_x$ , найдем:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{x1}^0 &= \alpha_x \cos \theta; & \alpha_{z1}^0 &= -\alpha_x \sin \theta; \\ \alpha_{x2}^0 &= -\frac{1}{\alpha_x} \cos \theta; & \alpha_{z2}^0 &= \frac{1}{\alpha_x} \sin \theta. \end{aligned} \right\} \quad (12. 41)$$

Слагаемые  $I_0$  и  $I_{-n}$  дают вклад только при «сверхсветовом» движении заряда, в вакууме они равны нулю. Полагая в оставшихся слагаемых  $N_1 = N_2 = 1$  и объединяя обе поляризации, найдем

$$-\frac{dE}{dt} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-1}^1 d\mu \int_0^{\infty} d\omega \frac{e_1^2 \omega^2}{c^3} \left\{ \left( \frac{v_{\perp} n}{x} \cos \theta - v_z \sin \theta \right)^2 J_n^2(x) + v_{\perp}^2 J_n'^2(x) \right\} \times \\ \times \delta(\omega - n|\omega_B| - \omega\beta_{\parallel}\mu) \quad (12.42)$$

(множитель  $1 + \alpha_x^2$  в знаменателе сократился с таким же множителем в числителе). Это же выражение можно получить из общей формулы (12.7), полагая, согласно выражениям (12.3) и (12.14),

$$L'_{\alpha\beta} = -\frac{4\pi^2}{\omega} \delta\left(\frac{k^2 c^2}{\omega^2} - 1\right) \left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{k_{\alpha} k_{\beta}}{k^2}\right). \quad (12.43)$$

Исследуем качественно зависимость интенсивности излучения  $n$ -й гармоники от номера  $n$ . Рассмотрим сначала случай  $v_z = 0$ . Согласно выражению (12.38), в этом случае излучаются частоты  $\omega = n\omega_B$ . Интенсивность излучения, согласно формуле (12.36), пропорциональна квадрату частоты (а следовательно, квадрату номера гармоники  $n^2$ ) и, грубо говоря, квадрату функции Бесселя  $J_n^2\left(n \frac{v_{\perp}}{v_{\phi}} \sqrt{1 - \mu^2}\right)$ , где  $v_{\phi} = c/N$  — фазовая скорость волны, излучаемой в направлении  $\theta$  относительно магнитного поля. Если скорость заряда меньше фазовой скорости волны, то функция  $J_n\left(n \frac{v_{\perp}}{v_{\phi}} \sqrt{1 - \mu^2}\right)$  монотонно падает при возрастании номера  $n$ , причем тем быстрее, чем меньше отношение  $v/v_{\phi}$ . При  $v_{\perp}/v_{\phi} \ll 1$ , в частности, произведение  $nJ_n$  максимально при  $n = 1$ . При  $v_{\perp} \sim v_{\phi}$  функция Бесселя падает с ростом  $n$  более медленно и благодаря множителю  $n$  произведение  $nJ_n$  может оказаться максимальным при сравнительно больших значениях  $n$ . В изотропной среде, в частности, оказывается, что при  $1 - \frac{v}{v_{\phi}} \ll 1$  максимум интенсивности излучения смещается в сторону весьма высоких частот:

$$n \sim \frac{1}{\left(1 - \frac{v}{v_{\phi}}\right)^{3/2}}.$$

В бетатроне, например, в излучении ультрарелятивистского электрона могут оказаться существенными  $n \sim 10^5$ . В плазме даже при нерелятивистском движении заряда ( $v \ll c$ ) его скорость может оказаться сравнимой со скоростью излучаемых волн  $v_{\phi} = c/N$  благодаря тому, что в некоторой области частот показатель преломления плазмы может значительно превышать единицу. Конечно, максимум излучения нерелятивистского заряда не может сместиться в область очень высоких частот, так как при  $\omega \gg \omega_0$

показатель преломления становится равным единице. Однако при  $\omega \lesssim \omega_0$  распределение интенсивности излучения заряда в плазме может существенно отличаться от излучения в вакууме.

В наиболее чистом виде смещение максимума интенсивности излучения в сторону больших  $n$  при нерелятивистском движении проявляется у ионов [52]. Как мы видели в § 2, показатель преломления в очень широкой области частот, простирающейся от  $\omega = 0$  до  $\omega \sim \omega_{Bi} \sqrt{m_i/m_e}$ , равен примерно  $N \sim \omega_{oi}/\omega_{Bi}$ . Таким образом, при  $v \sim c \frac{\omega_{Bi}}{\omega_{oi}} = c_A$  область, где фазовая скорость волн сравнима со скоростью заряда, простирается до нескольких десятков  $n$  ( $n \lesssim \sqrt{m_i/m_e}$ ). Расчеты [52] показывают, например, что при условии  $\omega_{oi} > \omega_{Bi}$  максимум интенсивности излучения (на ветви  $B$ ) приходится на значения  $n = 3$  при  $\frac{v}{c} \frac{\omega_{oi}^2}{\omega_{Bi}^2} = 0,5$ ,  $n = 25$  при  $\frac{v}{c} \frac{\omega_{oi}^2}{\omega_{Bi}^2} = 0,9$ .

Кроме эффекта, связанного с медленностью волн ( $v_\phi < c$ ), в плазме существует еще один эффект, приводящий к резкому различию интенсивностей излучения в плазме и вакууме, даже если скорость заряда значительно меньше фазовой скорости волн ( $v \ll v_\phi$ ) [49]. Этот эффект связан с отмеченной в § 3 особенностью поляризации волн при  $\omega = \omega_{Bi}$  и  $\omega = \omega_{Be}$ . Как неоднократно уже указывалось, эффективное излучение (поглощение) волн зарядами происходит при наличии резонанса между зарядом и волной. Если  $v_z = 0$ , то для резонанса необходимо, чтобы вектор  $\mathbf{E}$  вращался в направлении вращения заряда. Но как раз при  $\omega = \omega_{Bi}$  и  $\omega = \omega_{Be}$  волн с такой поляризацией нет (за исключением случая  $\theta = 0$ ). Поэтому при  $v \ll v_\phi$  следует ожидать отсутствия излучения в плазме на этих частотах. Действительно, при  $x \ll 1$  интенсивность излучения на частоте  $\omega = n\omega_B$  равна в плазме

$$J_n = \frac{e_1^2 \omega_B^2 v_1^2}{c^3} \sum_{l=1}^2 \int_{-1}^1 \frac{N_l}{1 + \alpha_{xl}^2} \left( \frac{x^{n-1}}{n! 2^n} \right)^2 (1 \pm \alpha_x^0)^2 d\mu. \quad (12.44)$$

Верхний знак относится к излучению иона, нижний — к излучению электрона.

В вакууме соответственно имеем

$$J_n = \frac{e_1^2 \omega_B^2 v_1^2}{c^3} \int_{-1}^1 \left( \frac{x^{n-1}}{n! 2^n} \right)^2 (1 + \mu^2) d\mu. \quad (12.45)$$

При  $n = 1$  в плазме для ионов  $\alpha_x^0 = -1$ , для электронов  $\alpha_x^0 = +1$ . [см. (3.64) и (3.65)], так что действительно  $J_1 = 0$ . В вакууме же

в нерелятивистском случае ( $x \ll 1$ ) на основной тон ( $n = 1$ ) приходится все излучение.

Если скорость движения заряда вдоль силовой линии не равна нулю ( $v_z \neq 0$ ), то вследствие эффекта Доплера частота излучения будет отличаться от циклотронной и может попасть в область, где  $N^2 \gg 1$  (для ионов это ветвь  $A$  (см. рис. 6), для электронов — ветвь  $B$  при  $\omega_0 \gg \omega_{Be}$  и ветвь  $E_m$  при  $\omega_0 \ll \omega_{Be}$ ). При этом может наблюдаться большая интенсивность излучения на частотах, близких к циклотронным. Результаты численного расчета интенсивности такого излучения приведены в работе [56].

В заключение этого раздела остановимся на тепловом излучении слабопоглощающей плазмы.

Аналогично тому, как это было сделано для одного заряда, можно определить потери энергии и совокупностью зарядов, беря соответствующий тензор  $G_{\alpha\beta}$ . Если излучателями являются те же заряды плазмы, которые определяют и электрическую проницаемость, то излучение можно назвать флуктуационным или тепловым. Найдем интенсивность теплового излучения при максвелловском распределении зарядов плазмы для случая, когда поглощение в плазме можно считать пренебрежимо малым (прозрачное излучение). При слабом поглощении векторы поляризации  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  совпадают, так что эрмитова часть тензора  $L_{\alpha\beta}$  равна

$$L'_{\alpha\beta} = -\frac{4\pi^2\omega}{c^2} \sum_l a_{l\alpha} a_{l\beta}^* \delta \left( k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} N_l^2 \right). \quad (12.46)$$

Тензор  $G_{\alpha\beta}$  при максвелловском распределении зарядов по скоростям выражается через тензор электрической проницаемости (8.26):

$$G_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{T}{(2\pi)^5} \omega \frac{\varepsilon_{\alpha\beta} - \varepsilon_{\alpha\beta}^*}{2i}. \quad (12.47)$$

Из условия ортонормировки векторов  $\mathbf{a}$  (6.46) следует

$$\frac{(\varepsilon_{\alpha\beta} - \varepsilon_{\beta\alpha}^*) a_{\beta l} a_{\alpha l}^*}{2i} = \text{Im } N_e^2. \quad (12.48)$$

Подставляя  $G_{\alpha\beta}$  и  $L_{\alpha\beta}$  в выражение (12.7), учитывая последнее соотношение и вводя коэффициент поглощения  $\tilde{\alpha} = \frac{\text{Im } N^2}{N} \frac{\omega}{c}$ , получим

$$Q = \sum_{l=1}^2 \int d\Omega \int_0^\infty \frac{T\omega^2}{8\pi^3 c^2} N^2 \tilde{\alpha} d\omega. \quad (12.49)$$

Здесь  $d\Omega$  — элемент телесного угла в направлении волнового вектора. Чтобы получить выражение для излучательной способности среды, нужно выражение (12.49) записать в виде

$$Q = \int d\Omega_0 \sum_{l=1}^2 \int_0^\infty \eta_{\omega l} d\omega, \quad (12.50)$$



где  $d\Omega_0$  — элемент телесного угла в направлении распространения потока энергии, т. е. в направлении групповой скорости  $\mathbf{v}_{гр} = = \nabla_{\mathbf{k}}\omega$ . Наряду с преобразованием телесных углов, введем вместо коэффициента поглощения  $\tilde{\alpha}$  вдоль волнового вектора коэффициент поглощения  $\alpha$  вдоль луча, определив связь между ними из соотношения  $e^{-\tilde{\alpha}z} = e^{-\alpha s}$ . Очевидно,  $s = z/\cos(\widehat{k\mathbf{v}_{гр}})$  (рис. 17); следовательно,

$$\alpha = \tilde{\alpha} \cos(\widehat{k\mathbf{v}_{гр}}). \quad (12.51)$$

Из сравнения выражений (12.49) и (12.50) находим излучательную способность

$$\eta_{\omega l} = \frac{1}{2} I_{0\omega} N^2 \frac{d\Omega}{d\Omega_0} \frac{\alpha}{\cos(\widehat{k\mathbf{v}_{гр}})}, \quad (12.52)$$

где  $I_{0\omega}$  — равновесная интенсивность излучения в вакууме

$$I_{0\omega} = \frac{T\omega^2}{4\pi^3 c^2}. \quad (12.53)$$

Значения  $d\Omega/d\Omega_0$  и  $\cos(\widehat{k\mathbf{v}_{гр}})$  вычислены в монографиях [26, 36]. Приведем их без вывода:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\Omega}{d\Omega_0} &= - \frac{\sin \theta}{\frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \frac{\omega N \cos \theta + \sin \theta \partial(\omega N)/\partial \theta}{\sqrt{\omega^2 N^2 + [\partial(\omega N)/\partial \theta]^2}} \right\}}; \\ \frac{1}{\cos(\widehat{k\mathbf{v}_{гр}})} &= \sqrt{1 + \frac{1}{\omega^2 N^2} \left[ \frac{\partial(\omega N)}{\partial \theta} \right]^2}. \end{aligned} \right\} \quad (12.54)$$

В изотропной среде  $d\Omega/d\Omega_0 = 1$  и для суммарной излучательной способности получаем

$$\eta_{\omega} = \alpha_{\omega} I_{0\omega} N^2. \quad (12.55)$$

В анизотропной среде в области частот, где показатель преломления близок к единице ( $N^2 \approx 1$ ), направления векторов групповой скорости и волнового также не различаются, так что в этом случае

$$\eta_{\omega l} = \frac{1}{2} I_{0\omega} \alpha_l. \quad (12.56)$$

Формулы (12.52), (12.55) и (12.56), связывающие излучательную способность среды с ее коэффициентом поглощения, выражают собой закон Кирхгофа для слабопоглощающих сред, гласящий, что отношение излучательной способности к коэффициенту поглощения равняется интенсивности равновесного излучения среды:

$$\frac{\eta_{\omega}}{\alpha_{\omega}} = I_{\omega}. \quad (12.57)$$

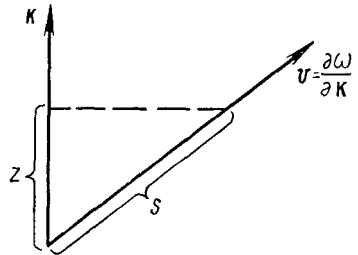


Рис. 17.

**Задача 1.** Заряд  $e_1$  движется со скоростью  $v$  по оси канала радиуса  $Q_0$ , окруженного плазмой ( $\varepsilon = 1 - \omega_0^2/\omega^2$ ). Определить поляризационные потери при  $Q_0 \ll v/\omega_0$ .

**Решение.** Исходим из формулы

$$\begin{aligned} -\frac{dE}{dt} &= -2\operatorname{Re} \int_0^{\infty} d\omega \int e_1 v E_z(\mathbf{k}, \omega) d\mathbf{k} = \\ &= 2e_1 v \int_0^{\infty} d\omega k_z \operatorname{Im} \varphi(\mathbf{k}, \omega) d\mathbf{k}, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\varphi(\mathbf{k}, \omega)$  — фурье-компонента скалярного потенциала. Она может быть выражена следующим образом:

$$\varphi(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} d\chi \int_0^{\infty} f(k_z, \varrho) e^{-ik_{\perp}\varrho \cos \chi} \varrho d\varrho, \quad (2)$$

причем  $f(k_z, \varrho)$  есть, в свою очередь, фурье-компонента скалярного потенциала, разложенного по времени и по продольной координате  $z$ . Функция  $f$  удовлетворяет уравнению ( $\varrho \neq 0$ )

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial f}{\partial \varrho} - k_z^2 f = 0. \quad (3)$$

Его решения соответственно при  $\varrho < Q_0$  и  $\varrho > Q_0$  таковы:

$$f_i = \frac{e_1}{\pi} K_0(k_z Q) \delta(\omega - k_z v) + B I_0(k_z Q); \quad (4)$$

$$f_e = C K_0(k_z Q). \quad (5)$$

Константы  $B$  и  $C$  находятся из условия непрерывности потенциала и радиальной компоненты вектора электрической индукции. С учетом соотношения

$$\operatorname{Im} \frac{1}{\varepsilon} = \pi \delta(\varepsilon) = \frac{\pi}{2} \omega_0 \delta(\omega - \omega_0) \quad (6)$$

и условия  $k_z Q_0 = \frac{\omega_0}{v} Q_0 \ll 1$  получается

$$\operatorname{Im} C = \operatorname{Im} B = \frac{e_1 \omega_0}{2} \delta(\omega - k_z v) \delta(\omega - \omega_0); \quad (7)$$

$$\operatorname{Im} \varphi(\mathbf{k}, \omega) = \frac{e_1 \omega_0}{2v} \delta\left(\frac{\omega}{v} - k_z\right) \delta(\omega - \omega_0) \frac{1}{2\pi} \frac{J_0(k_{\perp} Q_0)}{k_{\perp}^2 + k_z^2}. \quad (8)$$

Выполняя в уравнении (1) интегрирование по  $\omega$  и  $k_z$  и считая на основании квантовомеханических соображений верхний предел по  $k_{\perp}$  ограниченным и равным  $k_0$  (см. примечание на стр. 98), находим

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{e_1^2 \omega_0^2}{v} \int_0^{k_0} \frac{J_0(k_{\perp} Q_0)}{k_{\perp}^2 + \frac{\omega_0^2}{v^2}} k_{\perp} dk_{\perp}. \quad (9)$$

**Задача 2.** Вывести формулу для определения поляризационных потерь в плазме при наличии магнитного поля.

**Решение.** Поляризационные потери можно рассчитать как взятую с минусом работу, которую совершает над зарядом продольное поле, создаваемое этим зарядом в плазме. Из уравнения  $\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi q^{\text{стоп}}$  имеем

$$ik\varepsilon_{\alpha\beta}E_{\beta}(k, \omega) = 4\pi q^{\text{стоп}}(k, \omega). \quad (1)$$

Полагая  $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$  или  $E_{\beta} = \frac{k_{\beta}}{k} E$ , получаем, выражая с помощью уравнения непрерывности  $q(k, \omega)$  через  $\mathbf{j}(k, \omega)$  ( $q = \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{j})}{\omega}$ ):

$$\mathbf{E}(k, \omega) = i \frac{4\pi}{\omega} \frac{\mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{j})}{k^2 \varepsilon_{\parallel}}, \quad (2)$$

где  $\varepsilon_{\parallel} = \frac{k_{\alpha} k_{\beta}}{k^2} \varepsilon_{\alpha\beta}$  — продольная электрическая проницаемость, выражение для которой получается из уравнения (9, 10):

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\parallel} = 1 - i \sum \frac{4\pi e^2 n}{\omega k^2} \int dp_0 \int_0^{\infty} (\mathbf{k} \mathbf{v}(t)) \left( \mathbf{k} \frac{\partial F_0}{\partial p_0} \right) \times \\ \times e \left( \omega t - \mathbf{k} \int_0^t \mathbf{v}(t') dt' \right) dt. \end{aligned} \quad (3)$$

Если  $F_0 = F_0(\varepsilon_{\perp}, \varepsilon_{\parallel})$ , то, согласно формулам (9, 34), для  $\varepsilon_{\parallel} = \varepsilon_{xx}^0 \sin^2 \theta + \varepsilon_{zz}^0 \cos^2 \theta + \varepsilon_{xz}^0 \sin 2\theta$  получаем

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\parallel} = 1 + \sum \frac{4\pi e^2 n}{\omega} \int J_n^2 \left( \frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega_B} \right) \left\{ \left( \frac{n\omega_B}{k_{\perp}} \sin \theta + v_z \cos \theta \right)^2 F_{1\zeta n} + \right. \\ \left. + \frac{n^2 \omega_B^2}{k_{\perp}^2 \omega} F_2 \sin^2 \theta \right\} dp. \end{aligned} \quad (4)$$

В холодной плазме

$$\varepsilon_{\parallel} = 1 - \sum \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \frac{\omega^2 - \omega_B^2 \cos^2 \theta}{\omega^2 - \omega_B^2}. \quad (5)$$

Для потери энергии с помощью выражения (2) получаем формулу

$$-\frac{dE}{dt} = -\frac{(\mathbf{j} \cdot \mathbf{E})}{n} = 8\pi \int_0^{\infty} d\omega \int \frac{G_{\parallel}^1(\mathbf{k}, \omega)}{\omega |\varepsilon_{\parallel}|^2} \operatorname{Im} \varepsilon_{\parallel} d\mathbf{k}, \quad (6)$$

где  $G_{\parallel}^1 = \frac{k_{\alpha} k_{\beta}}{k^2} G_{\alpha\beta}^1$ . Согласно выражению (12, 9),

$$G_{\parallel}^1 = \frac{e_1^2}{(2\pi)^4 k^2} \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathbf{k} \mathbf{v}(t)) (\mathbf{k} \mathbf{v}_0) e \left( \omega t - \mathbf{k} \int_0^t \mathbf{v}(t') dt' \right) dt. \quad (7)$$

Если использовать разложение (12.30), то

$$G_{\parallel}^1 = \frac{e^2}{8\pi^3} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left( \frac{n\omega_B}{k_{\perp}} \sin \theta + v_t \cos \theta \right)^2 \times \\ \times J_n^2 \left( \frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega_B} \right) \delta(\omega - k_z v_z - n\omega_B). \quad (8)$$

### § 13. Влияние силы радиационного трения и флуктуационных полей на движение заряда в плазме

**Торможение заряда в плазме.** В § 12 потеря энергии зарядом была подсчитана как (взятая с минусом) работа  $A$  силы трения над движущимся зарядом. В некоторых случаях представляет интерес среднее значение самой силы трения. Плотность силы трения равна

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = q(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c} [\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \mathbf{V}(\mathbf{r}, t)]. \quad (13.1)$$

Среднее значение силы трения можно выразить по общим правилам (см. § 8) через спектральную плотность этой силы

$$\bar{\mathbf{F}} = \int \left\{ (q^* \mathbf{E})_{\mathbf{k}, \omega} + \frac{1}{c} ([\mathbf{j}^* \mathbf{V}])_{\mathbf{k}, \omega} \right\} d\mathbf{k} d\omega = \int \mathbf{F}_{\mathbf{k}, \omega} d\mathbf{k} d\omega. \quad (13.2)$$

Учитывая, что  $\mathbf{V}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{c}{\omega} [\mathbf{kE}(\mathbf{k}, \omega)]$  и что, согласно уравнению непрерывности (для фурье-компонент),

$$q(\mathbf{k}, \omega) = \frac{\mathbf{kj}(\mathbf{k}, \omega)}{\omega}, \quad (13.3)$$

находим (раскрывая двойное векторное произведение и сокращая члены, содержащие  $q$  и  $\mathbf{kj}$ ) следующее выражение для спектральной плотности силы трения:

$$\mathbf{F}_{\mathbf{k}, \omega} = \frac{\mathbf{k}}{\omega} A_{\mathbf{k}, \omega}, \quad (13.4)$$

где  $A_{\mathbf{k}, \omega} = (\mathbf{j}^* \mathbf{E})_{\mathbf{k}, \omega}$  — спектральная плотность работы силы трения (отнесенная к единице объема).

Помножив и поделив выражение (13.4) на постоянную Планка  $\hbar$ , мы получим квантовую интерпретацию выражения силы трения. Величина  $A_{\mathbf{k}, \omega} \hbar / \omega$  представляет собой, очевидно, спектральную плотность числа квантов, испускаемых в единицу времени движущимся зарядом. Импульс, уносимый каждым квантом, равен  $\hbar \mathbf{k}$ . Произведение этих величин, совпадающее с  $-\mathbf{F}_{\mathbf{k}, \omega}$ , представляет собой, следовательно, спектральную плотность импульса, теряемого зарядом в единицу времени.

Итак, рецепт получения выражения для усредненной силы трения очень прост: в подынтегральное выражение формулы для

изменения энергии заряда  $\frac{dE}{dt} = \int A_{\mathbf{k}, \omega} d\mathbf{k} d\omega$  нужно ввести множитель  $\frac{\mathbf{k}}{\omega}$ . Общее выражение для силы трения получается из формулы (12. 10):

$$\bar{\mathbf{F}} = 2 \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{\omega} \int \mathbf{k} G_{\beta\alpha}^1 L'_{\alpha\beta} d\mathbf{k}, \quad (13. 5)$$

где  $G_{\beta\alpha}^1$  определяется формулой (12. 9), а  $L'_{\alpha\beta}$  — эрмитова часть тензора  $L_{\alpha\beta}$ , выраженного формулами (12. 3) и (12. 4).

Для заряда, движущегося в плазме без магнитного поля, с помощью формулы (12. 12) получаем

$$\bar{\mathbf{F}} = -\frac{e_1^2}{\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{\omega} \int \mathbf{k} \left\{ \frac{(k\mathbf{v})^2}{k^2} \frac{\text{Im } \varepsilon_{\parallel}}{|\varepsilon_{\parallel}|^2} + \frac{v^2 - \frac{(k\mathbf{v})^2}{k^2}}{\left| \varepsilon_{\perp} - \frac{k^2 c^2}{\omega^2} \right|^2} \text{Im } \varepsilon_{\perp} \right\} \times \\ \times \delta(\omega - k\mathbf{v}) d\mathbf{k}. \quad (13. 6)$$

Поскольку скорость заряда  $\mathbf{v} = \text{const}$  (в нулевом приближении), то работа силы трения  $\bar{A} = \mathbf{v}\bar{\mathbf{F}} = \mathbf{v}\bar{\mathbf{F}}$ . Действительно, умножая силу трения (13. 6) на  $\mathbf{v}$ , получим (учитывая, что благодаря наличию  $\delta$ -функции  $\frac{k\mathbf{v}}{\omega} = 1$ ) выражение для  $dE/dt$ , совпадающее с выражением (12. 12).

Среднюю силу трения заряда, движущегося в плазме при наличии магнитного поля, можно получить с помощью формулы (12. 34). Запишем эту формулу в виде

$$-\frac{dE}{dt} = - \int_0^{\infty} d\omega \int A_{\mathbf{k}, \omega} d\mathbf{k} = \int_0^{\infty} d\omega \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n(\omega), \quad (13. 7)$$

где  $P_n(\omega)$  — интенсивность излучения (черенковского при  $n = 0$ , циклотронного с учетом нормального доплер-эффекта при  $n = 1, 2, 3, \dots$ , циклотронного с аномальным доплер-эффектом при  $n = -1, -2, -3, \dots$ ):

$$P_n(\omega) = -\text{Re} \sum_{l=1}^2 i \frac{e_1^2}{\pi^2} \int \frac{d\mathbf{k}}{\omega(1 + \alpha_{xl}^2)} \times \\ \times \frac{\left\{ \left( \alpha_{xl}^0 \frac{v_{\perp} n}{x_l} + \alpha_{zl}^0 v_z \right) J_n \left( \frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega_B} \right) + v_{\perp} J'_n \left( \frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega_B} \right) \right\}^2}{\frac{k^2 c^2}{\omega^2} - \varepsilon_l(\omega, \mathbf{k})} \times \\ \times \delta(\omega - k_z v_z - n\omega_B). \quad (13. 8)$$

Усредненная сила трения, согласно уравнениям (13. 2) и (13. 4), выражается формулой

$$\bar{\mathbf{F}} = \int_0^{\infty} d\omega \int \frac{\mathbf{k}}{\omega} A_{\mathbf{k}, \omega} d\mathbf{k}. \quad (13. 9)$$

С помощью этой силы трения можно найти, как при излучении перераспределяется энергия поступательного и вращательного движений заряда. Поскольку скорость движения вдоль магнитного поля постоянна ( $v_z = \text{const}$ ), то работа силы трения над поступательной степенью свободы  $A_{\parallel} = \overline{v_z F_z} = v_z \overline{F_z}$ , т. е., согласно выражению (13. 4),

$$A_{\parallel} = \int \frac{k_z v_z}{\omega} A_{\mathbf{k}, \omega} d\mathbf{k} d\omega. \quad (13. 10)$$

Благодаря наличию  $\delta$ -функций в выражении для  $A_{\mathbf{k}, \omega}$ , множитель  $\frac{k_z v_z}{\omega}$  заменяется в каждом члене суммы по  $n$  на  $\frac{\omega - n\omega_B}{\omega}$ . Переходя, как и при выводе формулы (12. 36) к суммированию по положительным  $n$ , для потери энергии поступательного движения будем иметь

$$-\frac{dE_{\parallel}}{dt} = \int P_0 d\omega + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \int \frac{\omega - n\omega_B}{\omega} P_n d\omega + \int \frac{\omega + n\omega_B}{\omega} P_{-n} d\omega \right\}. \quad (13. 11)$$

Потери энергии вращательного движения заряда получатся вычитанием выражения (13. 11) из выражения (13. 7):

$$-\frac{dE_{\perp}}{dt} = -\left( \frac{dE}{dt} - \frac{dE_{\parallel}}{dt} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \int \frac{n\omega_B}{\omega} P_n d\omega - \int \frac{n\omega_B}{\omega} P_{-n} d\omega \right\}. \quad (13. 12)$$

Это выражение очень наглядно на языке квантов. Напомним, что  $P_n$  — это интенсивность излучения «нормальных доплеровских частот»

$$\omega = \frac{n\omega_B}{1 - \frac{k_z v_z}{\omega}}; \quad \left( \frac{k_z v_z}{\omega} = N\beta_{\parallel} \cos \theta < 1 \right). \quad (13. 13)$$

а  $P_{-n}$  — интенсивность излучения «аномальных доплеровских частот»

$$\omega = -\frac{n\omega_B}{1 - \frac{k_z v_z}{\omega}}; \quad \left( \frac{k_z v_z}{\omega} = N\beta_{\parallel} \cos \theta > 1 \right). \quad (13. 14)$$

С квантовомеханической точки зрения излучение нормального доплеровского кванта сопровождается изменением энергии осциллятора (вращающегося заряда) на величину  $\hbar n \omega_B$ , т. е. уменьшением поперечной энергии заряда. Излучение же аномального доплеровского кванта сопровождается изменением энергии осциллятора на величину  $-\hbar n \omega_B$ , т. е. увеличением поперечной энергии, происходящим вследствие уменьшения энергии поступательного движения. Число первых квантов, отнесенное к единичному интервалу частот, равно  $P_n/\hbar\omega$ , число вторых равно  $P_{-n}/\hbar\omega$ . Отсюда для энергии, уносимой квантами, и получается выражение (13. 12).

Приведенные выражения (13. 11) и (13. 12) для потерь энергии, так же как и формулы (12. 34) и (12. 36), не удобны для выделения из общих потерь, связанных с поляризацией плазмы и возбуждением продольных (плазменных) колебаний. Эти «поляризационные» потери удобнее находить, предполагая с самого начала продольность волн ( $\text{rot } \mathbf{E} = 0$ ). Суммарные поляризационные потери, полученные таким способом, определяются формулой (см. задачу 2 к § 12)

$$-\frac{dE}{dt} = \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{\omega} \int \frac{8\pi G_{\parallel}^1(\mathbf{k}, \omega)}{|\varepsilon_{\parallel}|^2} \text{Im } \varepsilon_{\parallel} d\mathbf{k}, \quad (13. 15)$$

так что средняя сила трения

$$\bar{\mathbf{F}} = 8 \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{\omega^2} \int \mathbf{k} \frac{G_{\parallel}^1(\mathbf{k}, \omega)}{|\varepsilon_{\parallel}|^2} \text{Im } \varepsilon_{\parallel} d\mathbf{k}. \quad (13. 16)$$

Выражения для  $\varepsilon_{\parallel}$  и  $G_{\parallel}$  приведены в задаче 2 к § 12. Введем обозначения:

$$P_n'' = \frac{e^2}{\pi^2 \omega} \int \left( \frac{n\omega_B}{k_{\perp}} \sin \theta + v_z \cos \theta \right)^2 J_n^2 \left( \frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega_B} \right) \frac{\text{Im } \varepsilon_{\parallel}}{|\varepsilon_{\parallel}|^2} d\mathbf{k}. \quad (13. 17)$$

Тогда формулы для потери энергии поступательного и вращательного движения получаются совпадающими с формулами (13. 11) и (13. 12), если в последних сделать замену  $P_n \rightarrow P_n''$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ).

**О поглощении флуктуационного поля движущимся зарядом.** Кроме собственного поля, приводящего к силе трения, на заряд, движущийся в плазме, действует флуктуационное поле всех остальных зарядов. Среднее значение этого поля равно нулю, однако работа над вызываемыми этим полем флуктуациями скорости заряда, будучи квадратичной по полю величиной, отлична от нуля, т. е. заряд поглощает энергию. Энергия, поглощаемая в единицу

времени в единице объема совокупностью зарядов с функцией распределения  $F_0(\mathbf{v})$ , может быть рассчитана по формуле (8. 24):

$$Q = \mathbf{jE} = \int \sigma'_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega) (E_{\alpha}^* E_{\beta})_{\mathbf{k}, \omega} d\mathbf{k} d\omega, \quad (13. 18)$$

где  $\sigma'_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega)$  — эрмитова часть тензора проводимости, рассчитанного по известной функции распределения  $F_0(\mathbf{v})$  с помощью формулы (9. 10). Взяв в качестве  $F_0(\mathbf{v})$  функцию распределения, соответствующую единственному движущемуся заряду, получим энергию, поглощаемую в единицу времени этим зарядом. Для заряда, движущегося прямолинейно со скоростью  $\mathbf{v}_0$ , эта функция такова:

$$F_0(\mathbf{v}) = \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0). \quad (13. 19)$$

Рассмотрим случай движения заряда в изотропной среде. Здесь поглощаемая энергия представляется в виде суммы  $Q = Q_{\perp} + Q_{\parallel}$ , где  $Q_{\perp}$  и  $Q_{\parallel}$  — части, связанные соответственно с поглощением поперечного и продольного полей:

$$Q_{\perp} = \int \sigma'_{\perp}(\mathbf{k}, \omega) (E_{\perp}^2)_{\mathbf{k}, \omega} d\mathbf{k} d\omega; \quad (13. 20)$$

$$Q_{\parallel} = \int \sigma'_{\parallel}(\mathbf{k}, \omega) (E_{\parallel}^2)_{\mathbf{k}, \omega} d\mathbf{k} d\omega. \quad (13. 21)$$

Из выражения (9. 10), учитывая связь  $\sigma_{\alpha\beta} = i \frac{4\pi}{\omega} (\epsilon_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta})$ , находим:

$$\sigma'_{\parallel}(\mathbf{k}, \omega) = - \frac{\pi e_1^2}{m_1} \int \frac{(\mathbf{k}\mathbf{v}) \mathbf{k}}{k^2} \frac{\partial F_0}{\partial \mathbf{v}} \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) d\mathbf{v}; \quad (13. 22)$$

$$\sigma'_{\perp}(\mathbf{k}, \omega) = - \frac{\pi e_1^2}{m_1} \int \left[ v^2 - \frac{(\mathbf{k}\mathbf{v})^2}{k^2} \right] \frac{\mathbf{k}}{\omega} \frac{\partial F_0}{\partial \mathbf{v}} \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) d\mathbf{v}. \quad (13. 23)$$

Подставляя выражения (13. 22) и (13. 23) в формулы (13. 20) и (13. 21) и выполняя простое интегрирование по  $\omega$  и  $\mathbf{v}$ , находим:

$$Q_{\parallel} = \frac{\pi e_1^2}{m_1} \int \left[ \frac{\partial}{\partial \omega} \left( \omega |E_{\parallel}^2|_{\mathbf{k}, \omega} \right) \right]_{\omega=\mathbf{k}\mathbf{v}_0} d\mathbf{k}; \quad (13. 24)$$

$$Q_{\perp} = \frac{\pi e_1^2}{m_1} \int \left[ k^2 v_0^2 - (\mathbf{k}\mathbf{v}_0)^2 \right] \left[ \frac{\partial}{\partial \omega} \left( \frac{(E_{\perp}^2)_{\mathbf{k}, \omega}}{\omega} \right) \right]_{\omega=\mathbf{k}\mathbf{v}_0} d\mathbf{k}. \quad (13. 25)$$

Входящие в эти формулы спектральные плотности  $(E_{\parallel}^2)_{\mathbf{k}, \omega}$  и  $(E_{\perp}^2)_{\mathbf{k}, \omega}$  в стационарных условиях и в отсутствие посторонних



источников поля выражается согласно формуле (6. 40) следующим образом:

$$(E_{\parallel}^2)_{k\omega} = \frac{16\pi^2}{\omega^2} \frac{G_{\parallel}}{|\varepsilon_{\parallel}|^2}; \quad ((E_{\perp}^2)_{k, \omega} = \frac{16\pi^2}{\omega^2} \frac{2G_{\perp}}{\left| \frac{k^2 c^2}{\omega^2} - \varepsilon_{\perp} \right|^2}, \quad (13. 26)$$

где  $G_{\parallel} = \frac{k_{\alpha} k_{\beta}}{k^2} G_{\alpha\beta}$  и  $2G_{\perp} = \left( (\delta_{\alpha\beta} - \frac{k_{\alpha} k_{\beta}}{k^2}) G_{\alpha\beta} \right)$  определяются с помощью формул (12. 8) и (12. 11):

$$\left. \begin{aligned} G_{\parallel} &= \sum \frac{e^2 n}{(2\pi)^3} \left\langle \frac{(k\nu)^2}{k^2} \delta(\omega - k\nu) \right\rangle; \\ 2G_{\perp} &= \sum \frac{e^2 n}{(2\pi)^3} \left\langle \left[ v^2 - \frac{(k\nu)^2}{k^2} \right] \delta(\omega - k\nu) \right\rangle. \end{aligned} \right\} (13. 27)$$

Здесь суммирование производится по сортам зарядов плазмы, угловые скобки означают усреднение по скоростям. Если плазма находится в состоянии термодинамического равновесия (максвелловское распределение по скоростям с одинаковой температурой  $T$  всех зарядов), то  $G_{\parallel}$  и  $G_{\perp}$  связаны с  $\text{Im } \varepsilon_{\parallel}$  и  $\text{Im } \varepsilon_{\perp}$  соотношениями (8. 26) (при  $\hbar\omega \ll T$ ):

$$G_{\parallel} = \frac{T}{(2\pi)^3} \omega \text{Im } \varepsilon_{\parallel}; \quad G_{\perp} = \frac{T}{(2\pi)^3} \omega \text{Im } \varepsilon_{\perp}. \quad (13. 28)$$

Для выяснения роли поглощения флуктуационного поля рассмотрим случай, когда скорость заряда мала по сравнению с тепловой скоростью движения электронов плазмы ( $\omega \ll k\nu_{Te}$ ), но велика по сравнению с тепловой скоростью ионов (случай «неподвижных ионов»). Основной вклад в изменение энергии заряда дает продольное поле. Поэтому влиянием поперечного поля можно пренебречь. Общее изменение энергии заряда, включающее в себя как поглощение энергии (13. 24), так и поляризационные потери (12. 12), дается формулой

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \frac{e_1^2 T}{2\pi^2 m_1} \int \left[ \frac{\partial}{\partial \omega} \left( \frac{\text{Im } \varepsilon_{\parallel}}{|\varepsilon_{\parallel}|^2} \right) \right]_{\omega = k\nu_0} dk - \frac{e_1^2}{\pi^2} \int \frac{k\nu_0}{k^2} \times \\ &\quad \times \left( \frac{\text{Im } \varepsilon_{\parallel}}{|\varepsilon_{\parallel}|^2} \right)_{\omega = k\nu_0} dk; \end{aligned} \quad (13. 29)$$

В рассматриваемом приближении  $k\nu_{Ti} \ll \omega \ll k\nu_{Te}$  выражение (10. 2) для  $\varepsilon_{\parallel}$  принимает вид

$$\varepsilon_{\parallel} = 1 + \frac{1}{k^2 d_e^2} \left( 1 + i\sqrt{\pi} \frac{\omega}{k\nu_{Te}} \right); \quad d_e^2 = \frac{T_e}{4\pi z e^2 n_e}, \quad (13. 30)$$

так что

$$\text{Im } \varepsilon_{\parallel} = i \frac{\sqrt{\pi} \omega}{k^2 d_e^2 \nu_{Te}}; \quad \frac{1}{|\varepsilon_{\parallel}|^2} \approx \frac{k^4 d_e^4}{(k^2 d_e^2 + 1)^2}. \quad (13. 31)$$

Подставляя выражения (13. 31) в формулу (13. 29), находим ( $k_d \equiv \frac{1}{d_e}$ ):

$$\frac{dE}{dt} = \frac{4e_1^2 \omega_0^2}{\sqrt{\pi} v_{Te}^3} \left( \frac{T}{m_1} - \frac{2}{3} v_0^2 \right) \int_0^{k_{\max}} \frac{k^3 dk}{(k^2 + k_d^2)^2} \approx \frac{4e_1^2 \omega_0^2}{\sqrt{\pi} v_{Te}^3} \times \\ \times \left( \frac{T}{m_1} - \frac{2}{3} v_0^2 \right) \ln \frac{k_{\max}}{k_d} \quad (13. 32)$$

(относительно верхнего предела  $k_{\max}$  см. § 12 и задачу 1 к § 12).

Второе слагаемое здесь определяет торможение заряда, которое в отличие от случая быстрого заряда [формула (12. 22)] растет с увеличением скорости. Первое слагаемое, не зависящее от  $v_0$ , определяет набор энергии зарядом.

Выражение (12. 32) становится несправедливым при  $v_0^2 \leq \frac{T}{m_1}$ , так как при скорости движения заряда, сравнимой с тепловой, его траекторию нельзя считать прямолинейной. Однако из этого выражения можно сделать качественный вывод о необходимости учета взаимодействия заряда, имеющего скорость  $v \sim \sqrt{\frac{T}{m_1}}$ , с флуктуационным полем зарядов плазмы.

Следует отметить, что в областях прозрачности плазмы, где собственные частоты колебаний (решения дисперсионных уравнений  $\epsilon_{\parallel} = 0$ ,  $\frac{k^2 c^2}{\omega^2} - \epsilon_{\perp} = 0$ ) не имеют мнимых частей, спектральные плотности  $(E_{\parallel}^2)_{k, \omega}$  и  $(E_{\perp}^2)_{k, \omega}$  могут в принципе значительно превосходить «тепловой» уровень, определяемый формулами (13. 26). Если спектры  $(E_{\parallel}^2)_{k, \omega}$  и  $(E_{\perp}^2)_{k, \omega}$  известны, то формулы (13. 24) и (13. 25) позволяют рассчитать набор энергии зарядом и в «надтепловых» флуктуационных электромагнитных полях.

**Выражение столкновительного члена через электрическую проницаемость плазмы.** В предыдущем изложении основные электромагнитные характеристики плазмы — тензор электрической проницаемости  $\epsilon_{\alpha\beta}$  и корреляционная функция токов  $G_{\alpha\beta}$  — брались приближенными: они были вычислены для не взаимодействующих зарядов. Соответствующее кинетическое уравнение (в отсутствие возмущений) для частиц сорта  $a$  имеет вид

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} + \mathbf{v}_a \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{F}_0 \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{p}_a} = 0, \quad (13. 33)$$

где

$$\mathbf{F}_0 = -\frac{e_a}{c} [\mathbf{v}_a \mathbf{B}].$$

В действительности на движущиеся заряды действуют, как мы видели выше, радиационная сила трения и флуктуационные поля.

Радиационную силу трения, поскольку она мала, можно вычислить по невозмущенному движению заряда и, как это делается в электродинамике, добавить в исходное уравнение движения зарядов. Флуктуационное поле  $\mathbf{E}$  тоже можно вычислить, исходя из невозмущенного движения зарядов. Рассматривая это поле  $\mathbf{E}$  как возмущение, можно найти флуктуационную часть  $f_a^{(1)}$  функции распределения  $f_a$  и учесть действие флуктуационного поля в «квазилинейном приближении». Соответствующая суммарная добавка к кинетическому уравнению (в правой его части), называемая столкновительным членом, имеет вид

$$S(f_a) = -\frac{\partial}{\partial p_a} \{ \overline{F_{\text{тр}} \cdot f_a} + \overline{F^{(1)} \cdot f_a^{(1)}} \}, \quad (13.34)$$

где

$$F^{(1)} = e_a \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_a \mathbf{B}] \right).$$

Рассмотрим  $S(f_a)$  для плазмы без магнитного поля. Наибольший вклад в  $S(f_a)$  дает продольное поле (учет поперечного поля становится существенным только для релятивистской плазмы, которое мы только и учтем. Поправка к функции распределения  $f_a^{(1)}(\mathbf{k}, \omega)$  связана с продольным полем  $\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega)$  соотношением (см. задачу к § 9)

$$f_a^{(1)}(\mathbf{k}, \omega) = \mathbf{g}(\mathbf{k}, \omega) \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega), \quad (13.35)$$

где

$$\mathbf{g}(\mathbf{k}, \omega) = -ie \frac{\partial f_a}{\partial p_a} \left\{ \frac{P}{\omega - \mathbf{k} \mathbf{v}_a} - i\pi \delta(\omega - \mathbf{k} \mathbf{v}_a) \right\}. \quad (13.36)$$

Соответственно необходимая нам электрическая проницаемость, согласно выражению (9.10), имеет вид

$$\begin{aligned} \epsilon_{\parallel}(\mathbf{k}, \omega) &= \frac{k_{\alpha} k_{\beta}}{k^2} \epsilon_{\alpha\beta} = \\ &= 1 + \sum_b \left\langle \frac{4\pi e_b^2}{\omega} (\mathbf{k} \mathbf{v}_b) \left( \mathbf{k} \frac{\partial f_b}{\partial p_b} \right) \left\{ \frac{P}{\omega - \mathbf{k} \mathbf{v}_b} - i\pi \delta(\omega - \mathbf{k} \mathbf{v}_b) \right\} \right\rangle, \end{aligned} \quad (13.37)$$

где суммирование производится по всем сортам зарядов плазмы.

Входящая в первый член выражения столкновительного члена сила трения заряда, обусловленная создаваемым им продольным полем (так называемая динамическая сила трения), определяется первым членом формулы (13.6). Подставляя в него явное выражение  $\text{Im} \epsilon_{\parallel}$  из формулы (13.37), находим

$$F_{\text{тр}} = \sum_b 2e_a^2 e_b^2 \frac{\partial f_b}{\partial p_b} \int \frac{k k_{\beta}}{k^4 |\epsilon_{\parallel}|^2} \delta(\omega - \mathbf{k} \mathbf{v}_a) \delta(\omega - \mathbf{k} \mathbf{v}_b) d\omega dk. \quad (13.38)$$

Среднее значение произведения  $\mathbf{F}^{(1)}f_a^{(1)} = e_a f_a^{(1)} \mathbf{E}$ , входящего во второй член выражения для  $S(f_a)$ , в согласии с общим правилом (§ 8) можно записать в виде интеграла по  $\omega$  и  $\mathbf{k}$  от соответствующей спектральной плотности  $e_a (E_a^{(1)})_{\mathbf{k}, \omega}$ . Учитывая соотношение (13. 35), по аналогии с выражением (8. 24) имеем

$$\overline{f_a^{(1)} E_a} = e_a \int g'_\beta(\mathbf{k}, \omega) (E_a^* E_\beta)_{\mathbf{k}, \omega} d\mathbf{k} d\omega, \quad (13. 39)$$

где  $g'_\beta$  — эрмитовская часть оператора  $\mathbf{g}(\mathbf{k}, \omega)$ :

$$g'_\beta(\mathbf{k}, \omega) = -\pi e_a \frac{\partial f}{\partial p_\beta} \delta(\omega - \mathbf{k}v_a). \quad (13. 40)$$

Продольное поле  $\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega)$ , создаваемое зарядами, согласно выражениям (6. 38), (12. 2) и (12. 3), имеет вид

$$\mathbf{E} = -\frac{4\pi i}{\omega \varepsilon_{\parallel}} \frac{\mathbf{k}(\mathbf{k}j)}{k^2}. \quad (13. 41)$$

Учитывая, что, согласно формулам (8. 29), (12. 8) и (12. 11),

$$(j_a^* j_\beta)_{\mathbf{k}, \omega} \equiv G_{\alpha\beta} = \sum_b \int \frac{e_b^2 v_{b\alpha} v_{b\beta}}{(2\pi)^3} \delta(\omega - \mathbf{k}v_b) f(\mathbf{p}_b) d\mathbf{p}_b, \quad (13. 42)$$

для корреляционной функции микрополей, входящей в выражение (13. 39), получаем

$$(E_a^* E_\beta)_{\mathbf{k}, \omega} = \frac{2k_\alpha k_\beta}{\pi \omega^2 |\varepsilon_{\parallel}|^2} \sum_b \frac{e_b^2 (\mathbf{k}v_b)^2}{k^4} \times \\ \times \delta(\omega - \mathbf{k}v_b) f(\mathbf{p}_b) d\mathbf{p}_b. \quad (13. 43)$$

Подставляя выражения (13. 40) и (13. 43) в выражение (13. 39), находим

$$f_a^{(1)} E_a = -\sum_b 2e_a^2 e_b^2 \int \frac{\partial f_a}{\partial p_{\alpha\beta}} f_b d\mathbf{p}_b \int \frac{k_\alpha k_\beta}{k^4 |\varepsilon_{\parallel}|^2} \times \\ \times \delta(\omega - \mathbf{k}v_a) \delta(\omega - \mathbf{k}v_b) d\mathbf{k} d\omega. \quad (13. 44)$$

Вставляя теперь полученные выражения для силы трения (13. 38) и для произведения  $\overline{f_a^{(1)} \mathbf{E}^{(1)}}$  (13. 44) в формулу (13. 34), получим окончательное выражение для столкновительного члена (подробнее см. [69])

$$S(f_a) = -\sum_b 2e_a^2 e_b^2 \frac{\partial}{\partial p_{\alpha\alpha}} \int I_{\alpha\beta} \left( f_a \frac{\partial f_b}{\partial p_{\beta\beta}} - f_b \frac{\partial f_a}{\partial p_{\alpha\beta}} \right) d\mathbf{p}_b, \quad (13. 45)$$

где

$$I_{\alpha\beta} = \int \frac{k_\alpha k_\beta}{k^4 |\varepsilon_{\parallel}(\omega, \mathbf{k})|^2} \delta(\mathbf{k}v_a - \mathbf{k}v_b) \times \\ \times \delta(\omega - \mathbf{k}v_a) \delta(\omega - \mathbf{k}v_b) d\omega d\mathbf{k}. \quad (13. 46)$$

## § 14. Флуктуации в плазме. Рассеяние волн [58—60]

Как уже указывалось в § 8, решение уравнений Максвелла (6. 1), в которых под  $\mathbf{j}_{\text{стоп}}$  понимается микроскопическая плотность тока  $\mathbf{j}^m$  (6. 8), позволяет найти различные флуктуационные величины — энергию флуктуационного электромагнитного поля, флуктуации плотностей токов и зарядов и т. д.

Все эти величины выражаются в конечном итоге через две основные характеристики среды — тензор электрической проницаемости  $\epsilon_{\alpha\beta}$  и корреляционную функцию микротоков  $G_{\alpha\beta}$  (или их парциальные части, относящиеся к зарядам какого-либо выделенного сорта).

В настоящем параграфе мы рассмотрим наиболее важные флуктуационные величины — энергию кулоновского взаимодействия зарядов, которая связана непосредственно с энергией продольного электрического поля  $E_{\parallel}^2/8\pi$ , а также флуктуацию полного заряда плазмы и электронной плотности, через которую выражается сечение рассеяния электромагнитных волн.

**Энергия кулоновского взаимодействия.** Энергия продольного электрического поля может быть записана по общим правилам [см. формулу (8. 22)] в виде интеграла по спектру

$$\overline{\frac{E_{\parallel}^2}{8\pi}} = \int \frac{(E_{\parallel}^2)_k}{8\pi} dk, \quad (14. 1)$$

где, согласно выражениям (13. 26) и (13. 28), в термодинамически равновесной плазме

$$(E_{\parallel}^2)_k = \int_{-\infty}^{\infty} (E_{\parallel}^2)_{k, \omega} d\omega = -\frac{T}{2\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega} \operatorname{Im} \frac{1}{\epsilon_{\parallel}} d\omega. \quad (14. 2)$$

Для вычисления этого интеграла рассмотрим вспомогательный интеграл  $\oint \frac{d\omega}{\omega \epsilon_{\parallel}}$ , где контур интегрирования охватывает верхнюю полуплоскость комплексного переменного  $\omega$ , исключая точку  $\omega = 0$ . Поскольку уравнение  $\epsilon_{\parallel} = 0$  имеет корни  $\omega = \operatorname{Re} \omega + i \operatorname{Im} \omega$  с  $\operatorname{Im} \omega < 0$  (что соответствует устойчивости термодинамически равновесной плазмы), то функция  $1/\epsilon_{\parallel}$  в верхней полуплоскости комплексного  $\omega$  не имеет полюсов. Следовательно, интеграл по замкнутому контуру, который можно разбить на три части: 1) главное значение на действительной оси, 2) интеграл по полуокружности  $|\omega| \rightarrow 0$ , обходящей точку  $\omega = 0$  по часовой стрелке, и 3) интеграл по дуге  $|\omega| \rightarrow \infty$  (против часовой стрелки), — равен нулю

$$\oint \frac{d\omega}{\omega \epsilon_{\parallel}} - \frac{i\pi}{\epsilon_{\parallel}(0)} + i\tau = 0. \quad (14. 3)$$

Отделяя действительную и мнимую части, находим

$$\int \text{Im} \frac{1}{\varepsilon_{\parallel}} \frac{d\omega}{\omega} = -\pi \left( 1 - \frac{1}{\varepsilon_{\parallel}(0, k)} \right). \quad (14.4)$$

Знак главного значения здесь снят, поскольку  $\text{Im} \frac{1}{\varepsilon_{\parallel}} \sim \omega$ .

Входящая в формулу (14.4) статическая электрическая проницаемость, согласно выражению (9.27),

$$\varepsilon_{\parallel}(0, k) = 1 + \frac{1}{k^2 d^2}, \quad (14.5)$$

где  $d$  — дебаевский радиус:

$$\frac{1}{d^2} = \sum_a \frac{4\pi e_a^2 n_a}{T}. \quad (14.6)$$

Из выражений (14.2), (14.4) и (14.5) находим

$$\frac{\overline{E_{\parallel}^2}}{8\pi} = \int \frac{T}{2} \frac{1}{1 + k^2 d^2} \frac{dk}{(2\pi)^3}. \quad (14.7)$$

При  $k \rightarrow \infty$  этот интеграл расходится, так как в энергию электрического поля (14.7) включена «ненаблюдаемая» энергия кулоновского поля невзаимодействующих точечных зарядов, которую можно определить из выражений (13.26) и (13.27):

$$\frac{\overline{E_{\parallel}^2}}{8\pi} = \sum_a \frac{e_a^2 n_a}{4\pi^2 k^2} \delta(\omega - kv_a) d\omega dk = \frac{T}{2} \frac{1}{k^2 d^2} \frac{dk}{(2\pi)^3}. \quad (14.8)$$

Вычитая выражение (14.8) из выражения (14.7), получим энергию кулоновского взаимодействия зарядов плазмы (ср. [61]):

$$U = -\frac{T}{2} \int \frac{1}{k^2 d^2 (1 + k^2 d^2)} \frac{dk}{(2\pi)^3} = -\frac{T}{8\pi d^3}. \quad (14.9)$$

**Флуктуация заряда.** Зная флуктуацию продольного электрического поля, с помощью уравнения  $\text{div } \mathbf{E} = 4\pi \rho$  нетрудно получить и флуктуацию заряда в плазме. Для пространственной фурье-компоненты плотности заряда из этого уравнения следует:  $\rho_k = -i \frac{k E_{\parallel}}{4\pi}$ , так что

$$(\rho^2)_k = \frac{k^2 (E_{\parallel}^2)_k}{16\pi^2}. \quad (14.10)$$

Для термодинамически равновесной плазмы, согласно выражениям (14.7) и (14.1),

$$(E_{\parallel}^2)_k = \frac{T}{2\pi^2} \frac{1}{1 + k^2 d^2}.$$

следовательно,

$$(\varrho^2)_k = \frac{T}{32\pi^4} \frac{k^2}{1+k^2d^2} = \frac{\sum e_a^2 n_a}{(2\pi)^3} \frac{k^2 d^2}{1+k^2 d^2}. \quad (14.11)$$

Применяя общие правила [см. формулу (8.21)], с помощью формулы (14.11) нетрудно получить одновременную пространственную корреляцию плотности заряда:

$$\begin{aligned} \overline{\varrho(\mathbf{r}, t) \varrho(\mathbf{r}', t')} &= \int (\varrho^2)_k e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} d\mathbf{k} = \\ &= \sum e_a^2 n_a \{ \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') + \nu(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \}, \end{aligned} \quad (14.12)$$

где функция корреляции  $\nu(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$  определяется формулой

$$\nu(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi d^2} e^{-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{d}}. \quad (14.13)$$

Формулу (14.11) можно получить и из полной плотности тока (микроскопической плюс наведенной флуктуационным полем):

$$j_{\parallel} = j_{\parallel}^M + \sigma_{\parallel} E_{\parallel}, \quad (14.14)$$

где  $E_{\parallel}$  определяется формулой (6.38):  $E_{\parallel} = -\frac{4\pi i}{\omega \varepsilon_{\parallel}} j_{\parallel}^M$ .

Отсюда

$$j_{\parallel} = j_{\parallel}^M \left( 1 - i \frac{4\pi \sigma_{\parallel}}{\omega \varepsilon_{\parallel}} \right) = \frac{j_{\parallel}^M}{\varepsilon_{\parallel}}. \quad (14.15)$$

Используя связь  $\varrho$  с  $j_{\parallel}$  [см. выражение (13.3)], получаем:

$$(\varrho^2)_{k, \omega} = \frac{k^2 G_{\parallel}}{\omega^2 \varepsilon_{\parallel}}. \quad (14.16)$$

Если воспользоваться термодинамическим значением  $G_{\parallel}$  (13.28) и проинтегрировать выражение (14.16) по  $\omega$ , то получится результат (14.11).

**Флуктуация электронной плотности.** Если необходимо вычислить флуктуацию зарядов только одного сорта (например, только электронов или только ионов), то в формуле (14.14) следует взять  $j_{\parallel}^M$  и  $\sigma_{\parallel}$ , относящиеся только к данному сорту зарядов. Напомним, что величины  $j^M$ ,  $\sigma$  и  $G$  — аддитивные:

$$j^M = \sum_a j_a^M; \quad \sigma = \sum_a \sigma_a; \quad G = \sum_a G_a. \quad (14.17)$$

Рассмотрим флуктуации электронного заряда в двухкомпонентной плазме. В этом случае

$$\varepsilon_{\parallel} = 1 + i \frac{4\pi}{\omega} (\sigma_{\parallel}^e + \sigma_{\parallel}^i) \quad (14.18)$$

(значки  $e$  и  $i$  относятся соответственно к электронам и ионам);

$$\sigma_{\parallel}^e = -ie^2 n_e \left\langle \frac{(\mathbf{k}\mathbf{v})}{k^2} \left( \mathbf{k} \frac{\partial F_e}{\partial \mathbf{p}} \right) \zeta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) \right\rangle. \quad (14.19)$$

При максвелловском распределении электронов по скоростям [ср. выражение (9.27)]

$$\frac{4\pi\sigma_{\parallel}^e}{\omega} = \frac{2\omega_{0e}^e}{k^2 v_{Te}^2} \left\{ Y \left( \frac{\omega}{k v_{Te}} \right) + i \left[ X \left( \frac{\omega}{k v_{Te}} \right) - 1 \right] \right\}. \quad (14.20)$$

Аналогично выражается  $\sigma_{\parallel}^i$ .

Суммарная плотность продольного тока, связанного с электронами, определяется формулой

$$\mathbf{j}_{\parallel}^e = \mathbf{j}_{\parallel}^{eM} + \sigma_{\parallel}^e \mathbf{E}_{\parallel} = \mathbf{j}_{\parallel}^{eM} \left( 1 - i \frac{4\pi\sigma_{\parallel}^e}{\omega \varepsilon_{\parallel}} \right) - i \frac{4\pi\sigma_{\parallel}^e}{\omega \varepsilon_{\parallel}} \mathbf{j}_{\parallel}^{iM}. \quad (14.21)$$

С помощью формулы (14.18) выражение в скобках можно записать несколько иначе:

$$1 - i \frac{4\pi\sigma_{\parallel}^e}{\omega \varepsilon_{\parallel}} = \frac{1 + i \frac{4\pi\sigma_{\parallel}^i}{\omega}}{\varepsilon_{\parallel}}. \quad (14.22)$$

Учитывая, что  $\mathbf{j}_{\parallel}^{eM} \mathbf{j}_{\parallel}^{iM} = 0$ , для спектральной плотности флуктуации продольного тока получим

$$(\mathbf{j}_{\parallel}^{e^2})_{\mathbf{k}, \omega} = \frac{G_{\parallel}^e}{|\varepsilon_{\parallel}|^2} \left| 1 + i \frac{4\pi\sigma_{\parallel}^i}{\omega} \right|^2 + \frac{16\pi^2 |\sigma_{\parallel}^e|^2}{\omega^2 |\varepsilon_{\parallel}|^2} G_{\parallel}^i. \quad (14.23)$$

Флуктуация электронного заряда связана с флуктуацией продольного тока простым соотношением  $(Q_e^2)_{\mathbf{k}, \omega} = \frac{k^2}{\omega^2} (\mathbf{j}_{\parallel}^e)_{\mathbf{k}, \omega}^2$ , вытекающим из уравнения непрерывности. Если электроны и ионы имеют максвелловское распределение по скоростям с температурами  $T_e$  и  $T_i$  соответственно, то

$$\begin{aligned} (Q_e^2)_{\mathbf{k}, \omega} &= \frac{e^2 \bar{n}_e}{8\pi^4 \omega |\varepsilon|^2} \left[ Y(x_e) \left\{ \left[ 1 + \frac{1}{k^2 d_i^2} (1 - X(x_i)) \right]^2 + Y^2(x_i) \right\} + \right. \\ &\quad \left. + Y(x_i) \left\{ \frac{1}{k^4 d_e^4} (1 - X(x_e))^2 + Y^2(x_e) \right\} \right]. \end{aligned} \quad (14.24)$$



Здесь

$$\left. \begin{aligned}
 |\varepsilon|^2 = & \left\{ 1 + \frac{1}{k^2 d_e^2} [1 - X(x_e)] + \frac{1}{k^2 d_i^2} [1 - X(x_i)] \right\}^2 + \\
 & + \left[ \frac{1}{k^2 d_e^2} Y(x_e) + \frac{1}{k^2 d_i^2} Y(x_i) \right]^2; \\
 x_e = & \frac{\omega}{|k| v_{Te}}; \quad x_i = \frac{\omega}{|k| v_{Ti}}; \\
 v_{Te} = & \sqrt{\frac{2T_e}{m_e}}; \quad v_{Ti} = \sqrt{\frac{2T_i}{m_i}}; \\
 X(x) = & 2xe^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt; \quad Y(x) = \sqrt{\pi} xe^{-x^2}.
 \end{aligned} \right\} \quad (14.25)$$

Как видно из формулы (14. 21), плотность электронного тока (а следовательно, и электронная плотность) состоит из трех слагаемых. Первое из них  $j_{\parallel}^{em}$  связано с «голыми» электронами, второе и третье — с поляризационными облачками вокруг электронов и ионов соответственно. Наличие поляризационного облака вокруг ионов объясняет факт зависимости флуктуации электронной плотности от ионных характеристик.

При  $T_e = T_i = T$  флуктуация электронной плотности может быть записана в виде \*

$$(\mathcal{Q}_e^2)_{k, \omega} = \frac{k^2 T}{(2\pi)^3 \omega} \operatorname{Im} \frac{(\varepsilon_e - 1) \varepsilon_i}{\varepsilon},$$

где

$$\varepsilon_e = 1 + i \frac{4\pi\sigma^e}{\omega}; \quad \varepsilon_i = 1 + i \frac{4\pi\sigma^i}{\omega}.$$

Эта форма записи позволяет использовать тот же прием интегрирования по  $\omega$ , что и при вычислении  $(E^2)_k$  (с той разницей, что здесь интеграл по дуге  $|\omega| \rightarrow \infty$  равен нулю). Производя указанное интегрирование, получим

$$(\mathcal{Q}_e^2)_k = \frac{e^2 n_e}{(2\pi)^3} \frac{k^2 d_i^2 + 1}{k^2 d_i^2 + 1 + d_e^2/d_i^2}.$$

Для одновременной корреляции плотности электронного заряда по аналогии с формулой (14. 12) найдем

$$\overline{\mathcal{Q}_e(\mathbf{r}, t) \mathcal{Q}_e(\mathbf{r}', t)} = e^2 n_e \left\{ \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') - \frac{1}{4\pi d_i^4/d_e^2} e^{-\frac{r}{d_i} \sqrt{1 + \frac{d_e^2}{d_i^2}}} \frac{1}{r} \right\}.$$

\* На эту форму записи автору указал О. П. Погуце.

В этих формулах

$$d_e^2 = \frac{T}{4\pi e^2 n_e}; \quad d_i^2 = \frac{T}{4\pi e_i^2 n_i}.$$

Спектральная плотность флуктуации электронного заряда (14. 24) имеет важное значение, так как через нее выражается сечение рассеяния электромагнитных волн на флуктуациях плотности.

**Рассеяние электромагнитных волн в плазме.** Пусть в плазме (без магнитного поля) распространяется поперечная волна, электрический вектор которой

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(\boldsymbol{\kappa} \mathbf{r} - \Omega t). \quad (14. 26)$$

Уравнение движения  $i$ -го электрона плазмы в поле волны имеет вид

$$\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} = -\frac{e\mathbf{E}_0}{m} \cos(\boldsymbol{\kappa} \mathbf{r}_i - \Omega t), \quad (14. 27)$$

где  $\mathbf{r}_i(t)$  — радиус-вектор рассматриваемого электрона. С помощью уравнения (14. 27) находим изменение микроскопической плотности тока электронов  $\mathbf{j} = -\sum e \mathbf{v}_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t))$ , связанное с полем волны:

$$\frac{\partial \delta \mathbf{j}}{\partial t} = -\sum e \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)) = -\frac{e\mathbf{E}_0}{m} \mathbf{q}_e \cos(\boldsymbol{\kappa} \mathbf{r} - \Omega t). \quad (14. 28)$$

Здесь  $\mathbf{q}_e = -\sum e \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t))$  — микроскопическая плотность заряда электронов.

Разложим, как обычно,  $\mathbf{q}_e$  и  $\delta \mathbf{j}$  в интегралы Фурье:

$$\mathbf{q}_e = \int \mathbf{q}_e(\mathbf{k}', \omega') e^{i(\mathbf{k}' \mathbf{r} - \omega' t)} d\mathbf{k}' d\omega'; \quad (14. 29)$$

$$\delta \mathbf{j} = \int \delta \mathbf{j}(\mathbf{k}, \omega) e^{i(\mathbf{k} \mathbf{r} - \omega t)} d\mathbf{k} d\omega. \quad (14. 30)$$

Из уравнения (14. 28) вытекает следующая связь между Фурье-компонентами этих величин:

$$\delta \mathbf{j}(\mathbf{k}, \omega) = i \frac{e\mathbf{E}_0}{m\omega} \frac{\mathbf{q}_e(\mathbf{k} - \boldsymbol{\kappa}, \omega - \Omega) + \mathbf{q}_e(\mathbf{k} + \boldsymbol{\kappa}, \omega + \Omega)}{2}. \quad (14. 31)$$

Отсюда нетрудно получить корреляцию индуцированных волной токов:

$$\overline{\delta j_{\alpha}^*(\mathbf{k}, \omega) \delta j_{\beta}(\mathbf{k}', \omega')} = \delta G_{\alpha\beta} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta(\omega - \omega'); \quad (14. 32)$$

$$\delta G_{\alpha\beta} = \frac{e^2 E_{\alpha}^0 E_{\beta}^0}{m^2 \omega^2} \frac{(\mathbf{q}_e^2)_{\mathbf{k}-\boldsymbol{\kappa}, \omega-\Omega} + (\mathbf{q}_e^2)_{\mathbf{k}+\boldsymbol{\kappa}, \omega+\Omega}}{4}. \quad (14. 33)$$

Излучение, индуцированное волной (14. 26), определится теперь по формуле (12. 7):

$$\delta Q = -\int \delta G_{\beta\alpha} L'_{\alpha\beta} d\mathbf{k} d\omega, \quad (14. 34)$$

где, согласно выражению (12. 42),

$$L'_{\alpha\beta} = -\frac{4\pi^2}{\omega} \delta\left(\frac{k^2 c^2}{\omega^2} - \varepsilon(\omega)\right) \left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2}\right). \quad (14. 35)$$

Заметим, что  $(Q_e^2)_{\mathbf{k}+\boldsymbol{\kappa}, \omega+\Omega} = (Q_e^2)_{-\mathbf{k}-\boldsymbol{\kappa}, -\omega-\Omega}$ . Воспользовавшись этим и заменяя переменные интегрирования  $\omega \rightarrow -\omega$  и  $k \rightarrow -k$  в той части интеграла (14. 24), которая содержит  $(Q_e^2)_{\mathbf{k}+\boldsymbol{\kappa}, \omega+\Omega}$ , для энергии рассеянного излучения (отнесенного к единице объема) получим

$$\begin{aligned} \delta Q = & \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int \frac{2\pi^2 e^2 E_\alpha^0 E_\beta^0}{m^2 \omega^3} (Q_e^2)_{\mathbf{k}-\boldsymbol{\kappa}, \omega-\Omega} \times \\ & \times \delta\left(\frac{k^2 c^2}{\omega^2} - \varepsilon(\omega)\right) \left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2}\right) dk. \end{aligned} \quad (14. 36)$$

Пусть электрический вектор проходящей волны (14. 26) направлен по оси  $x$ , а ее волновой вектор  $\boldsymbol{\kappa}$  — по оси  $z$ . Тогда

$$E_\alpha^0 E_\beta^0 \left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2}\right) = E_0^2 \left(1 - \frac{k_x^2}{k^2}\right) = E_0^2 (1 - \sin^2 \theta \cos^2 \varphi), \quad (14. 37)$$

где  $\theta$  — угол между волновыми векторами проходящей и рассеянной волн, а  $\varphi$  — угол между проекцией волнового вектора рассеянной волны на плоскость  $xy$  и электрическим вектором проходящей волны. Поток энергии в проходящей волне равен

$$\bar{S} = \frac{c}{8\pi} E_0^2 \sqrt{\varepsilon(\Omega)}, \quad (14. 38)$$

Записывая  $dk = k^2 dk dQ$  и производя в выражении (14. 36) с помощью  $\delta$ -функции интегрирование по  $k$ , получим формулу для сечения рассеяния

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \frac{\delta Q / \bar{n}_e}{\bar{S}} = \int \sigma_\omega d\omega d\Omega; \\ \sigma_\omega &= \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \sqrt{\frac{\varepsilon(\omega)}{\varepsilon(\Omega)}} (1 - \sin^2 \theta \cos^2 \varphi) \frac{(2\pi)^3 (Q_e^2)_{\mathbf{k}-\boldsymbol{\kappa}, \omega-\Omega}}{e^2 \bar{n}_e}. \end{aligned} \right\} \quad (14. 39)$$

Относительный сдвиг частоты при рассеянии обычно мал,  $\frac{\omega - \Omega}{\omega} \ll 1$ , поэтому можно считать  $|\mathbf{k}| = |\boldsymbol{\kappa}| = \frac{\Omega}{c} \sqrt{\varepsilon(\omega)}$ . При этом

$$(\mathbf{k} - \boldsymbol{\kappa})^2 = 4 \frac{\Omega^2}{c^2} \varepsilon(\Omega) \sin^2 \frac{\theta}{2}. \quad (14. 40)$$

В предельном случае коротких волн,  $kd \gg 1$  (т. е.  $\omega \gg \omega_0 \frac{c}{v_T}$ ),  
имеем:  $\varepsilon = 1$ ;  $(Q_e^2)_{k-\kappa, \omega-\Omega} = \frac{e^2 \bar{n}_e}{8\pi^4 (\omega - \Omega)} Y \left( \frac{\omega - \Omega}{|k - \kappa| v_{Te}} \right)$ , так что

$$\sigma_\omega = \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 (1 - \sin^2 \theta \cos^2 \varphi) \frac{c}{2\sqrt{\pi} \Omega v_{Te} \sin \frac{\theta}{2}} e^{-\frac{(\omega - \Omega)^2}{4\Omega^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} \frac{c^2}{v_{Te}^2}}. \quad (14.41)$$

Это есть сечение рассеяния на изолированных электронах, имеющих тепловой разброс скоростей. При  $v_{Te} \rightarrow 0$  фактор, учитывающий доплеровское уширение рассеянной «линии», превращается в  $\delta(\omega - \Omega)$ :

$$\sigma_\omega \rightarrow \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 (1 - \sin^2 \theta \cos^2 \varphi) \delta(\omega - \Omega). \quad (14.42)$$

Рассмотрим теперь случай  $kd \ll 1$ , т. е.  $\omega \ll \omega_0 \frac{c}{v_T}$  (но, разумеется,  $\omega > \omega_0$ , так как в противном случае волна не проходит в плазму). В этом случае вклад в рассеяние дают и поляризационные облачка вокруг электронов и ионов. Вклад в интенсивность рассеяния с неизменившейся частотой  $\omega = \Omega$  дают заряды, имеющие скорость, близкую к нулю. Поскольку при сравнимых температурах электронов и ионов число ионов (в единичном интервале скоростей), имеющих скорость  $v = 0$ , в  $\sqrt{\frac{m_i}{m_e}}$  раз больше электронов, то ясно, что форма линии рассеяния при  $\omega - \Omega = 0$  будет определяться поляризационными облачками, связанными с ионами. При  $\omega - \Omega = 0$  сечение (14.39) имеет следующее значение:

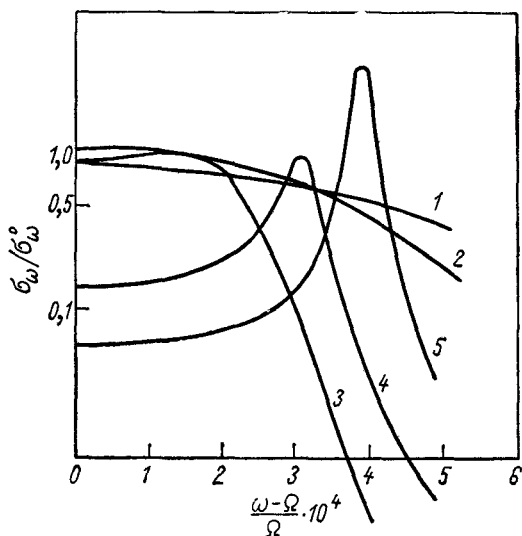
$$\sigma_\omega^0 = \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{1 - \sin^2 \theta \cos^2 \varphi}{2\sqrt{\varepsilon(\Omega)} \Omega \sin \frac{\theta}{2}} \times$$

$$\times \sqrt{\frac{m_i c^2}{2\pi T_i}} \frac{1 + \left( \frac{m_e T_e^3}{m_i T_i^3} \right)^{1/2} [1 + (k - \kappa)^2 d_i^2]^2}{[1 + (k - \kappa)^2 d_e^2 + d_e^2/d_i^2]^2}. \quad (14.43)$$

Как видно, при  $kd \ll 1$  величина  $\sigma_\omega^0 \sim \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{1}{\kappa v_{Ti}}$ . При  $\omega - \Omega > \kappa v_{Ti}$  число резонансных ионов становится экспоненциально малым; в этой области  $\sigma_\omega \ll \sigma_\omega^0$ .

Сечение рассеяния может иметь максимум при тех значениях разности частот  $\omega - \Omega$ , при которых входящая в знаменатель флуктуации плотности (14.24) электрическая проницаемость близка к нулю, т. е. когда частота рассеянных волн сдвинута на величину частоты собственных колебаний плазмы. Острый макси-

мум сечение рассеяния имеет на ленгмюровской частоте  $\omega - \Omega = \omega_0$  (при  $kd \ll 1$ ). Однако интегральное сечение в этой области частот составляет малую долю ( $\sim k^2 d^2 \ll 1$ ) от полного сечения. В сильно неизотермической плазме при  $T_e \gg T_i$  сечение рассеяния имеет максимум на частоте, сдвинутой на величину частоты



Дифференциальное сечение рассеяния для плазмы с различными температурами электронов и ионов:

Кривая	$T_e, эв$	$T_i, эв$	$\sigma_{tot} / r_0^2$
1	5	50	0,812
2	5	25	0,808
3	5	5	0,500
4	25	5	0,236
5	50	5	0,360

Рис. 18.

ионного звука (10. 5):  $\omega - \Omega = |k - \kappa| \sqrt{\frac{zT_e}{m_i}}$ . Зависимость дифференциального сечения  $\sigma_\omega$  рассеяния от частоты при рассеянии под прямым углом ( $\theta = \frac{\pi}{2}$ ) для некоторых параметров плазмы приведена на рис. 18, взятом из работы Розенблюта и Ростокера [60]. Частота проходящей волны здесь взята равной удвоенной ленгмюровской частоте  $\Omega = 2\omega_0$ ,  $\Omega/c = 3,76 \text{ см}^{-1}$ . На кривых видно появление максимума на ионной звуковой частоте при увеличении отношения  $T_e T_i$ .

Суммарное (проинтегрированное по частотам) дифференциальное сечение по порядку величины  $\sigma_{tot} \sim r_0^2 = \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2$ . В изотермической ( $T_e = T_i$ ) плазме, например, когда интегрирование по частотам нетрудно выполнить аналитически, отношение сечения рассеяния в плазме к сечению рассеяния на изолированном электроны меняется в пределах от 1 (при  $kd \gg 1$ ) до  $1/2$  (при  $kd \ll 1$ ).

**Задача.** Найти флуктуации магнитного и поперечного электрического полей в плазме при  $\mathbf{V}_0 = 0$ .

**Решение.** Воспользуемся формулой (13. 26):

$$(E_{\perp}^2)_{\mathbf{k}, \omega} = \frac{16\pi^2}{\omega^2} \frac{2G_{\perp}}{\left|\frac{k^2 c^2}{\omega^2} - \varepsilon_{\perp}\right|^2}. \quad (1)$$

Поскольку  $\mathbf{V} = \frac{c}{\omega} [\mathbf{kE}]$ , то

$$(B^2)_{\mathbf{k}, \omega} = \frac{c^2 k^2}{\omega^2} (E_{\perp}^2)_{\mathbf{k}, \omega} = \frac{16\pi^2}{\omega^2} \frac{2G_{\perp}}{\left|\frac{k^2 c^2}{\omega^2} - \varepsilon_{\perp}\right|^2} \frac{c^2 k^2}{\omega^2}. \quad (2)$$

Для термодинамически равновесной плазмы с помощью выражения (8. 26) находим:

$$(E_{\perp}^2)_{\mathbf{k}, \omega} = -\frac{T}{\pi^3} \frac{1}{\omega} \operatorname{Im} \frac{1}{\varepsilon_{\perp} - \frac{k^2 c^2}{\omega^2}}; \quad (3)$$

$$(B^2)_{\mathbf{k}, \omega} = \frac{k^2 c^2}{\omega^2} (E_{\perp}^2)_{\mathbf{k}, \omega}.$$

Так же, как и в § 14, можно произвести интегрирование по  $\omega$ . Интегралы  $\oint \frac{d\omega}{\omega \left(\varepsilon_{\perp} - \frac{k^2 c^2}{\omega^2}\right)}$  и  $\oint \frac{k^2 c^2 d\omega}{\omega^3 \left(\varepsilon_{\perp} - \frac{k^2 c^2}{\omega^2}\right)}$  по замкнутому контуру, охватывающему верхнюю полуплоскость, сводятся к интегралам по действительной оси и по полуокружностям:  $|\omega| \rightarrow \infty$  для первого интеграла и  $|\omega| \rightarrow 0$  для второго. Оба интеграла дают один и тот же результат. В итоге получаем

$$(E_{\perp}^2)_{\mathbf{k}} = \int_{-\infty}^{\infty} (E_{\perp}^2)_{\mathbf{k}, \omega} d\omega = \frac{T}{\pi^2}; \quad (B^2)_{\mathbf{k}} = \frac{T}{\pi^2}. \quad (4)$$

Одновременные пространственные корреляции

$$\overline{E_{\perp}(\mathbf{r}, t) E_{\perp}(\mathbf{r}', t')} = \int (E_{\perp}^2)_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} dk = 8\pi T \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'); \quad (5)$$

$$\overline{\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \mathbf{B}(\mathbf{r}', t')} = 8\pi T \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'). \quad (6)$$

Для полной плотности энергии электрического и магнитного поля с помощью выражений (4) и (8. 22) получаем

$$\frac{\overline{E_{\perp}^2}}{8\pi} = \frac{\overline{B^2}}{8\pi} = \int T \frac{dk}{(2\pi)^3}. \quad (7)$$

## § 15. Уравнение переноса энергии электромагнитных колебаний [62—64]

Из уравнений Максвелла (6. 1) вытекает теорема Пойнтинга в следующей форме:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{E^2 + B^2}{8\pi} \right) + \operatorname{div} \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}\mathbf{B}] + \mathbf{j}(\mathbf{E}) \mathbf{E} = -\mathbf{j}^m \mathbf{E}. \quad (15. 1)$$

Применим эту теорему к квазимонохроматической волне (волновому пакету)

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}, t) e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}, \quad (15. 2)$$

где  $\mathbf{E}_0(\mathbf{r}, t)$  — комплексная амплитуда, медленно меняющаяся во времени и пространстве,  $\omega$  и  $\mathbf{k}$  — вещественная частота и волновой вектор. Такая волна существует в области частот, где мала антиэрмитовская часть  $\epsilon''_{\alpha\beta}$  тензора электрической проницаемости  $\epsilon_{\alpha\beta}$ . Поэтому в дальнейшем будем считать  $\epsilon''_{\alpha\beta}$ , а также скорость изменения амплитуды волны величинами первого порядка малости:

$$\omega \frac{\partial}{\partial t} \sim \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \sim \frac{\epsilon''_{\alpha\beta}}{\epsilon_{\alpha\beta}} \ll 1. \quad (15. 3)$$

Для получения связи между вещественными  $\omega$  и  $\mathbf{k}$  следует пренебречь антиэрмитовской частью тензора  $\epsilon_{\alpha\beta}$  и зависимостью амплитуды  $\mathbf{E}_0$  от  $\mathbf{r}$  и  $t$ . Тогда однородные уравнения Максвелла для амплитуды будут выражаться формулой (1. 14):

$$D_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega) E_\beta = 0, \quad (15. 4)$$

где

$$D_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega) = k^2 \delta_{\alpha\beta} - k_\alpha k_\beta - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{\alpha\beta}. \quad (15. 5)$$

Найдем связь плотности тока  $\mathbf{j}(\mathbf{E})$  с квазимонохроматической волной (15. 2). Подставим с этой целью выражение (15. 2) в уравнение (6. 2), связывающее  $\mathbf{j}(\mathbf{E})$  с  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ , и выделим там множитель  $e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}$ :

$$\begin{aligned} j_\alpha(\mathbf{r}, t) &= e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} \int_{-\infty}^t dt' \int \sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \times \\ &\times E_0(\mathbf{r}', t') e^{-i\mathbf{k}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + i\omega(t - t')} d\mathbf{r}'. \end{aligned} \quad (15. 6)$$

Учитывая медленную зависимость амплитуды  $E_0(\mathbf{r}, t)$  от координат и времени, разложим ее по  $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ ,  $t - t'$ :

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{r}', t') = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{E}_0}{\partial \mathbf{r}} (\mathbf{r}' - \mathbf{r}) + \frac{\partial \mathbf{E}_0}{\partial t} (t' - t) + \dots \quad (15. 7)$$

По определению тензора комплексной проводимости (6. 17) имеем:

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\infty}^t dt' \int \sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') e^{-i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') + i\omega(t-t')} d\mathbf{r}' &= \sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega); \\ \int_{-\infty}^t dt' \int \sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') (\mathbf{r}' - \mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') + i\omega(t-t')} d\mathbf{r}' &= \\ &= -i \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}} \sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega); \\ \int_{-\infty}^t dt' \int \sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') (t' - t) e^{-i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') + i\omega(t-t')} d\mathbf{r}' &= \\ &= -i \frac{\partial}{\partial \omega} \sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega). \end{aligned} \right\} (15. 8)$$

Поэтому подстановка разложения (15. 7) в уравнение (15. 6) дает

$$\begin{aligned} j_{\alpha}(\mathbf{r}, t) &= e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} \left\{ \sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega) E_0(\mathbf{r}, t) - i \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}}{\partial \mathbf{k}} \times \right. \\ &\quad \left. \times \frac{\partial E_{0\beta}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} + i \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}}{\partial \omega} \frac{\partial E_{0\beta}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right\}. \end{aligned} \quad (15. 9)$$

Сделаем во втором и третьем слагаемых замену  $i\sigma_{\alpha\beta} = (\epsilon_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta}) \frac{\omega}{4\pi}$ . Тогда третий член левой части уравнения (15. 1) примет вид\*:

$$\begin{aligned} \overline{j\mathbf{E}} &= \left[ \frac{\partial(\omega \epsilon'_{\alpha\beta})}{\partial \omega} - \delta_{\alpha\beta} \right] \frac{\partial}{\partial t} \frac{E_{\alpha}^* E_{\beta}}{16\pi} - \omega \frac{\partial \epsilon_{\alpha\beta}}{\partial \mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \frac{E_{\alpha}^* E_{\beta}}{16\pi} + \\ &\quad + \frac{1}{2} \sigma'_{\alpha\beta} E_{\alpha}^* E_{\beta}. \end{aligned} \quad (15. 10)$$

В последнем члене уравнения (15. 1), выражающем величину флуктуационного излучения (см. § 12), следует выделить ту долю излучения, которая приходится на волны рассматриваемой поляризации и частоты:

$$-\overline{j^M \mathbf{E}} \rightarrow \int \eta_{\omega} d\Omega_0. \quad (15. 11)$$

Подставляя выражения (15. 10) и (15. 11) в уравнение (15. 1) и группируя слагаемые, содержащие производные по времени и по координатам, получим теорему Пойнтинга в виде

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \text{div} \mathbf{S} + \frac{1}{2} \sigma'_{\alpha\beta} E_{\beta}^* E_{\alpha} = \int \eta_{\omega} d\Omega_0, \quad (15. 12)$$

\* Напомним, что среднее значение (за период колебания) билинейных по полю величин вида (15. 2) определяется следующим образом:

$$\overline{\text{Re} E_{\alpha} \text{Re} E_{\beta}} = \frac{1}{2} \text{Re} E_{\alpha}^* E_{\beta}.$$



где  $W$  — плотность энергии и  $S$  — плотность потока энергии электромагнитных колебаний, выражаемые формулами:

$$W = \frac{\partial(\omega \varepsilon'_{\alpha\beta})}{\partial\omega} \frac{E_{\alpha}^* E_{\beta}}{16\pi} + \frac{B^2}{16\pi}; \quad (15.13)$$

$$S = \frac{c}{8\pi} [EB^*] - \omega \frac{\partial \varepsilon'_{\alpha\beta}}{\partial k} \frac{E_{\alpha}^* E_{\beta}}{16\pi}. \quad (15.14)$$

Заметим, что для электромагнитного поля, удовлетворяющего однородным уравнениям Максвелла (15.4), или (1.12) и (1.13), справедливо соотношение

$$\overline{B^2} = \overline{DE} = \frac{1}{2} \varepsilon'_{\alpha\beta} E_{\alpha}^* E_{\beta}, \quad (15.15)$$

с помощью которого выражение для энергии (15.13) можно записать также в виде

$$W = \frac{\partial(\omega^2 \varepsilon'_{\alpha\beta})}{\omega \partial\omega} \frac{E_{\alpha}^* E_{\beta}}{16\pi}. \quad (15.16)$$

Плотность потока энергии  $S$  с помощью соотношения  $\mathbf{B} = \frac{c}{\omega} [\mathbf{kE}]$  можно записать так:

$$S = \frac{c^2}{8\pi\omega} \left\{ kE^2 - \frac{(kE)E^* + (kE^*)E}{2} \right\} - \omega \frac{\partial \varepsilon'_{\alpha\beta}}{\partial k} \frac{E_{\alpha}^* E_{\beta}}{16\pi}. \quad (15.17)$$

Входящие в уравнение (15.12) плотности потока энергии  $S$  и диссипируемой энергии  $\sigma'_{\alpha\beta} E_{\alpha}^* E_{\beta}$  можно выразить через  $W$ , если ввести групповую скорость  $\mathbf{v} = \frac{d\omega}{dk}$  и декремент затухания (нарастания) волн. С этой целью рассмотрим уравнение (15.4) (с учетом антиэрмитовской части  $\varepsilon''_{\alpha\beta}$ ) для волн  $\mathbf{E} = \text{const } e^{i(kr - \omega t)}$  с вещественным  $\mathbf{k}$ . В этом случае частота  $\omega$  комплексна:  $\omega = \omega_1 - i\omega_2$ , причем, ввиду предполагаемой малости  $\varepsilon''_{\alpha\beta}$ ,  $\omega_2 \ll \omega_1$ . Выделим в тензоре  $D_{\alpha\beta}$ , входящем в уравнение (15.4), неэрмитовскую часть, связанную с наличием  $\omega_2$  и  $\varepsilon''_{\alpha\beta}$ :

$$\left. \begin{aligned} D_{\alpha\beta} &= D'_{\alpha\beta} - i \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon''_{\alpha\beta} + i \frac{\partial(\omega^2 \varepsilon'_{\alpha\beta})}{c^2 \partial\omega} \omega_2; \\ D'_{\alpha\beta} &= k^2 \delta_{\alpha\beta} - k_{\alpha} k_{\beta} - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon'_{\alpha\beta}. \end{aligned} \right\} \quad (15.18)$$

Умножая теперь уравнение (15.4) на  $E_{\alpha}^*$ , отделяя действительные и мнимые части и приравнявая мнимую часть нулю, получим

$$\frac{1}{2} \sigma'_{\alpha\beta} E_{\alpha}^* E_{\beta} = 2\omega_2 W \equiv \gamma W. \quad (15.19)$$

При получении связи  $S$  и  $W$  следует ограничиться нулевым приближением (так как учет поправок, связанных с поглощением,

дал бы в уравнении (15. 1) уже члены второго порядка малости). Поэтому можно исходить из уравнения

$$D'_{\alpha\beta} E_{\alpha} = 0. \quad (15. 20)$$

Продифференцируем это уравнение по  $k$ :

$$\frac{\partial D_{\alpha\beta}}{\partial k} E_{\beta} + D'_{\alpha\beta} \frac{\partial E_{\beta}}{\partial k} = 0. \quad (15. 21)$$

Умножая полученное выражение на  $E_{\alpha}^*$  и учитывая, что  $D'_{\alpha\beta} E_{\alpha}^* = = D'_{\beta\alpha} E_{\alpha}^*$  [в силу уравнения (15. 20)], получим

$$\frac{\partial D'_{\alpha\beta}}{\partial k} E_{\beta} E_{\alpha}^* = 0. \quad (15. 22)$$

Выполняя дифференцирование по  $k$  с учетом зависимости  $\omega(k)$ , получаем известную связь потока энергии с энергией:

$$S = \frac{d\omega}{dk} W, \quad (15. 23)$$

где  $S$  и  $W$  выражаются формулами (15. 17) и (15. 16).

С учетом полученных соотношений (15. 19) и (15. 23) уравнение для энергии (15. 12) запишется в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{v}W) + \gamma W &= \int \eta_{\omega} d\Omega_{\omega}; \\ \mathbf{v} &= \frac{d\omega}{dk}, \end{aligned} \right\} \quad (15. 24)$$

где, согласно формуле (15. 19),  $\gamma = 2\omega_{\omega}$ .

Добавки в выражениях для  $W$  и  $S$ , получившиеся из члена  $\mathbf{jE}$ , имеющего смысл работы, производимой полем над зарядами, представляют собой, очевидно, энергию и поток энергии, заключенные в колебаниях зарядов. Рассмотрим, например, плазму в отсутствие магнитного поля. Для поперечных волн в гидродинамическом приближении  $\epsilon_{\alpha\beta} = \epsilon_{\perp} \left( \delta_{\alpha\beta} - \frac{k_{\alpha}k_{\beta}}{k^2} \right)$ ,  $\epsilon_{\perp} = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}$ , так что плотность энергии равна

$$W = \frac{\overline{B^2}}{8\pi} + \frac{\overline{E_{\perp}^2}}{8\pi} \frac{\partial(\epsilon_{\perp}\omega)}{\partial\omega} = \frac{\overline{B^2} + \overline{E_{\perp}^2}}{8\pi} + \frac{\omega_{0e}^2}{\omega^2} \frac{\overline{E_{\perp}^2}}{8\pi}. \quad (15. 25)$$

Последнее слагаемое здесь — энергия колебания электронов. Действительно, скорость электрона в волне  $v = i \frac{e}{m\omega} E$ , следовательно,

$$W_{эл} = \frac{nm\overline{v^2}}{2} = \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \frac{\overline{E^2}}{8\pi}. \quad (15. 26)$$

Для продольных волн (ограничимся только высокочастотными колебаниями) в области слабого затухания ( $k^2 T_e \ll m_e \omega^2$ )

$$\epsilon = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \left( 1 + \gamma \frac{k^2 T_e}{m_e \omega^2} \right).$$

Поток энергии целиком обусловлен добавкой в  $S$ , связанной с  $d\epsilon_{\alpha\beta}/dk$  (так как  $B = 0$ ):

$$S = -\omega \frac{\partial \epsilon_{\parallel}}{\partial k} \frac{\bar{E}^2}{8\pi} = \frac{2\gamma k T_e}{m_e \omega} \frac{\omega_{0e}^2}{\omega^2} \frac{\bar{E}^2}{8\pi} = \frac{\gamma \rho_0 v^2}{\omega} \mathbf{k}. \quad (15.27)$$

Как известно из гидродинамики [65], средний поток энергии малых колебаний равен  $\mathbf{q} = p^{(1)} \mathbf{v}$ . Учитывая, что изменение давления связано со скоростью соотношением  $p^{(1)} = \gamma \frac{kv}{\omega} p_0$ , получаем  $\mathbf{q} = \frac{\gamma \rho_0 v^2}{\omega} \mathbf{k}$ , т. е. формулу, совпадающую с выражением потока энергии по электродинамической формуле.

## П Р И Л О Ж Е Н И Е I

### ВЫВОД СООТНОШЕНИЯ (4.9)

Функция Бесселя имеет следующее интегральное представление:

$$\begin{aligned} J_n(x) &= \frac{1}{2\pi} \int e^{-ix \sin \varphi + in\varphi} d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int e^{ix \sin \varphi - in\varphi} d\varphi = \\ &= \frac{i^n}{2\pi} \int e^{-ix \sin \varphi + in\varphi} d\varphi = \frac{(-i)^n}{2\pi} \int e^{ix \cos \varphi + in\varphi} d\varphi. \end{aligned} \quad (I.1)$$

Интегрирование производится по любому промежутку длиной  $2\pi$ . Разложим  $e^{ix \sin \varphi}$  в ряд Фурье

$$e^{ix \sin \varphi} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m e^{im\varphi}. \quad (I.2)$$

Умножая (I.2) на  $e^{-in\varphi}$  и интегрируя по  $\varphi$  от 0 до  $2\pi$ , с учетом (I.1) находим

$$a_m = \frac{1}{2\pi} \int e^{ix \sin \varphi - in\varphi} d\varphi = J_m(x), \quad (I.3)$$

так что

$$e^{ix \sin \varphi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) e^{in\varphi}. \quad (I.4)$$

## П Р И Л О Ж Е Н И Е II

### ВЫВОД СООТНОШЕНИЯ (9.20)

Рассмотрим интеграл ( $k > 0$ )

$$\begin{aligned} I(\nu) &= \left\langle \frac{1}{\omega - n\omega_B - kv_z + i\nu} \right\rangle = \\ &= \left( \frac{m}{2\pi T} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{mv_z^2}{2T}} dv_z}{\omega - n\omega_B - kv_z + i\nu} = \frac{1}{\sqrt{\pi k \nu T}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-t^2} dt}{z - t}, \end{aligned} \quad (II.1)$$

где  $v_T = \sqrt{\frac{2T}{m}}$ ;  $z = \frac{\omega - n\omega_B + iv}{kv_T}$ . Учитывая, что  $\text{Im } z = \frac{v}{kv_T} > 0$ , запишем

$$\frac{1}{z-t} = -i \int_0^{\infty} e^{t(z-t)\xi} d\xi. \quad (II. 2)$$

Далее

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-t^2}}{z-t} dt &= -i \int_0^{\infty} d\xi \cdot e^{iz\xi - \frac{\xi^2}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(t+i\frac{\xi}{2}\right)^2} dt = \\ &= -i \sqrt{\pi} e^{-z^2} \int_0^{\infty} e^{-\left(\frac{\xi}{2} - iz\right)^2} d\xi = \\ &= -i \sqrt{\pi} e^{-z^2} \left( 2 \int_0^{\infty} e^{-y^2} dy - 2 \int_0^{-iz} e^{-y^2} dy \right) = \\ &= -i \pi e^{-z^2} \left( 1 + \frac{2i}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{t^2} dt \right). \end{aligned} \quad (II. 3)$$

При  $v \rightarrow 0$   $I(v) \rightarrow \langle \zeta(\omega - n\omega_B - kv_2) \rangle$ . Таким образом  $\left( v_T \equiv \sqrt{\frac{2T}{m}} \right)$ ,

$$\langle \zeta(\omega - n\omega_B - kv_2) \rangle = \frac{1}{\omega - n\omega_B} Z \left( \frac{\omega - n\omega_B}{kv_T} \right), \quad (II. 4)$$

где

$$\left. \begin{aligned} Z(z) &= X(z) - iY(z); \\ X(z) &= 2ze^{-z^2} \int_0^z e^{t^2} dt; \\ Y(z) &= \sqrt{\pi} ze^{-z^2}. \end{aligned} \right\} \quad (II. 5)$$

Рассмотрим интеграл  $\int_0^z e^{t^2} dt$  при  $|z| \gg 1$ . Положим  $t = z - a$ . Тогда

$$\int_0^z e^{t^2} dt = e^{z^2} \int_0^z e^{-2az} e^{a^2} da = e^{z^2} \int_0^z e^{-2az} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{2n}}{n!} da.$$

С экспоненциальной точностью верхний предел при  $|z| \gg 1$  теперь можно положить равным бесконечности. Пользуясь известным соотношением

$$\int_0^{\infty} e^{-t} t^x dt = x!,$$

находим

$$\int_0^z e^{t^2} dt = e^{z^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{n! (2z)^{2n+1}} = \frac{e^{z^2}}{2z} \left( 1 + \frac{1}{2z^2} + \frac{3}{4z^4} + \frac{15}{8z^6} + \dots \right).$$

Таким образом, при  $|z| \gg 1$

$$X(z) = 1 + \frac{1}{2z^2} + \frac{3}{4z^4} + \frac{15}{8z^6} + \dots$$

### ПРИЛОЖЕНИЕ III

#### ВЫВОД УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА, ПОЗВОЛЯЮЩИХ ОПИСЫВАТЬ ФЛУКТУАЦИОННЫЕ ПОЛЯ

Покажем, как из точных уравнений движения всех зарядов плазмы и из точных уравнений Максвелла в пустоте (иначе — уравнений Лоренца) получается система уравнений Максвелла (б. 1) для среды, позволяющая описывать как средние, так и флуктуационные поля. Вывод этих уравнений удобно производить с помощью «микроскопической функции распределения» — фазовой плотности частиц сорта  $a^*$ :

$$N_a(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \sum \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{ai}(t)) \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_{ai}(t)). \quad (1)$$

Среднее значение функции  $N_a$  пропорционально обычной функции распределения  $f_a$ :

$$\overline{N}_a(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = f_a = n_a F_a(\mathbf{r}, \mathbf{p}), \quad (2)$$

где  $n_a$  — плотность частиц сорта  $a$ .

Пусть уравнения движения  $i$ -го заряда имеют вид

$$\frac{d\mathbf{p}_{ai}}{dt} = \mathbf{F}_{\Sigma}(\mathbf{r}_{ai}, t); \quad (3)$$

$$\frac{d\mathbf{r}_{ai}}{dt} = \mathbf{v}_{ai} = \frac{\mathbf{p}_{ai}}{m_a}, \quad (4)$$

где  $\mathbf{F}_{\Sigma}$  — суммарная сила, действующая на  $i$ -й заряд. Она складывается из внешней силы  $\mathbf{F}_e$ , не зависящей от распределения зарядов плазмы (например, силы тяжести, силы Лоренца во внешних электрическом и магнитном полях), и электромагнитной силы  $\mathbf{F}$ , возникающей из-за взаимодействия всей совокупности зарядов плазмы с рассматриваемым зарядом:

$$\mathbf{F}_{\Sigma}(\mathbf{r}_{ai}, t) = \mathbf{F}_e(\mathbf{r}_{ai}, t) + \mathbf{F}(\mathbf{r}_{ai}, t). \quad (5)$$

Тогда уравнение для  $N_a$  можно записать в виде

$$\hat{K}_e N_a + \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \{ \mathbf{F}(\mathbf{r}, t) N_a \} = 0, \quad (1)$$

где  $\hat{K}_e$  — «кинетический оператор»:

$$\hat{K}_e = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \{ \mathbf{F}_e(\mathbf{r}, t) \}. \quad (6)$$

\* Такой метод был развит в работах Ю. Л. Климонтовича и др. Ниже при изложении использована также работа О. П. Погуце (в печати).

Здесь индексом  $e$  отмечено то обстоятельство, что в  $\hat{K}_e$  входит внешняя сила  $F_e$ . В справедливости уравнения (I) можно убедиться непосредственно дифференцированием с учетом соотношений (3) и (4).

Кроме уравнения (I), необходимо использовать микроскопические уравнения Максвелла, которые мы запишем в символической форме для величины  $F$ :

$$\hat{M}_0 \mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \quad (\text{II})$$

( $\mathbf{F}_e$  в объеме, занятом плазмой, удовлетворяет однородным уравнениям  $\hat{M}_0 \mathbf{F}_e = 0$ ).

Здесь полная микроскопическая плотность тока  $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$  может быть записана с помощью  $N_a$ :

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \sum_a \int e_a \mathbf{v}_a N_a d\mathbf{p}_a. \quad (\text{III})$$

Индекс 0 у максвелловского оператора  $\hat{M}$  означает, что уравнения Максвелла берутся для вакуума.

Последующая процедура вывода будет заключаться в разделении системы уравнений (I) и (II) на уравнения для средних величин и флуктуационных отклонений от средних.

Отклонение  $N_a$  от среднего значения  $\bar{N}_a = \bar{f}_a$  обозначим через  $\Delta N_a$ :

$$N_a = \bar{N}_a - \Delta N_a. \quad (7)$$

Имея в виду получение уравнений, которые наряду с внутренними свойствами системы описывали бы распространение электромагнитных волн в плазме, будем выделять в  $\bar{N}_a$  малую добавку  $N_a^{(1)} \ll N_a^{(0)}$ , связанную с полем этой волны  $\bar{N}_a = N_a^{(0)} + N_a^{(1)}$ . Аналогично разделим на два слагаемых и флуктуационную часть:  $\Delta N_a = \Delta N_a^{(0)} + \Delta N_a^{(1)}$ . Таким образом, функцию  $N_a$  представим в виде

$$N_a = N_a^{(0)} + \Delta N_a^{(0)} + N_a^{(1)} + \Delta N_a^{(1)}. \quad (8)$$

Подставляя  $N_a$  в выражение (III) для тока, получим соответствующее разделение полной плотности тока

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}^{(0)} + \Delta \mathbf{j}^{(0)} + \mathbf{j}^{(1)} + \Delta \mathbf{j}^{(1)}. \quad (9)$$

В силу линейности уравнений Максвелла (II) «поле»  $\mathbf{F}$  также разделится на четыре части:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^{(0)} + \Delta \mathbf{F}^{(0)} + \mathbf{F}^{(1)} + \Delta \mathbf{F}^{(1)}, \quad (10)$$

удовлетворяющие соответственно уравнениям:

$$\hat{M}_0 \mathbf{F}^{(0)} = \mathbf{j}^{(0)}; \quad (\text{IIa})$$

$$\hat{M}_0 \Delta \mathbf{F}^{(0)} = \Delta \mathbf{j}^{(0)}; \quad (\text{IIб})$$

$$\hat{M}_0 \mathbf{F}^{(1)} = \mathbf{j}^{(1)}; \quad (\text{IIв})$$

$$\hat{M}_0 \Delta \mathbf{F}^{(1)} = \Delta \mathbf{j}^{(1)}, \quad (\text{IIг})$$

где

$$\mathbf{j}^{(0)} = \int \sum_a e_a \mathbf{v}_a N_a^{(0)} d\mathbf{p}; \quad (\text{IIIa})$$

$$\Delta \mathbf{j}^{(0)} = \int \sum_a e_a \mathbf{v}_a \Delta N_a^{(0)} d\mathbf{p}; \quad (\text{IIIб})$$

$$\mathbf{j}^{(1)} = \int \sum_a e_a \mathbf{v}_a N_a^{(1)} d\mathbf{p}; \quad (\text{IIIв})$$

$$\Delta \mathbf{j}^{(1)} = \int \sum_a e_a \mathbf{v}_a \Delta N_a^{(1)} d\mathbf{p}. \quad (\text{IIIг})$$

Напомним, что  $N^{(0)}$ ,  $N^{(1)}$ ,  $\mathbf{F}^{(0)}$ ,  $\mathbf{F}^{(1)}$ ,  $\mathbf{j}^{(0)}$ ,  $\mathbf{j}^{(1)}$  — это «средние» величины;  $\Delta$  означает флуктуирующую величину, среднее от которой равно нулю; нулем обозначены величины в отсутствие электромагнитной волны индексом 1 обозначены величины, связанные с электромагнитной волной. Все величины с индексом 1 считаем величинами первого порядка малости, по ним можно произвести линеаризацию (т. е. будем отбрасывать произведения типа  $\mathbf{F}^{(1)}N^{(1)}$ ,  $\Delta\mathbf{F}^{(1)}N^{(1)}$  и т. д.

Произведя усреднение уравнения (I) и отделяя величины нулевого и первого порядка малости, получим два уравнения для средних величин:

$$\widehat{K}N_a^{(0)} + \frac{\partial}{\partial p} \langle \Delta\mathbf{F}^{(0)} \Delta N_a^{(0)} \rangle = 0; \quad (11)$$

$$\widehat{K}N_a^{(1)} + \frac{\partial}{\partial p} \left\{ \mathbf{F}_a^{(1)}N^{(0)} + \langle \Delta\mathbf{F}^{(0)} \Delta N_a^{(1)} \rangle + \langle \Delta\mathbf{F}^{(1)} \Delta N_a^{(0)} \rangle \right\} = 0. \quad (12)$$

где оператор  $\widehat{K}$  выражается так:

$$\widehat{K} = \widehat{K}_e + \frac{\partial}{\partial p} \{ \mathbf{F}^{(0)}(\mathbf{r}, t) \cdot \} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v}_a \nabla) + \frac{\partial}{\partial p} \{ (\mathbf{F}_e + \mathbf{F}^{(0)}) \cdot \}. \quad (13)$$

Напомним, что  $\mathbf{F}_e$  — внешняя сила,  $\mathbf{F}^{(0)}$  — внутренняя ( $\mathbf{F}^{(0)}$  зависит от вида функции распределения).

Вычитая теперь уравнения (11) и (12) из уравнения (I) и отделяя снова величины первого порядка малости, получим два уравнения для флуктуирующих величин:

$$\widehat{K} \Delta N_a^{(0)} + \frac{\partial}{\partial p} \{ \Delta\mathbf{F}^{(0)} N_a^{(0)} + (\Delta N_a^{(0)} \Delta\mathbf{F}^{(0)} - \langle \Delta N_a^{(0)} \Delta\mathbf{F} \rangle) \} = 0; \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \widehat{K} \Delta N_a^{(1)} + \frac{\partial}{\partial p} \{ \mathbf{F}^{(1)} \Delta N_a^{(0)} + N_a^{(1)} \Delta\mathbf{F}^{(0)} + N_a^{(0)} \Delta\mathbf{F}^{(1)} + \\ + (\Delta\mathbf{F}^{(0)} \Delta N_a^{(1)} - \langle \Delta\mathbf{F}^{(0)} \Delta N_a^{(1)} \rangle) + (\Delta\mathbf{F}^{(1)} \Delta N_a^{(0)} - \langle \Delta\mathbf{F}^{(1)} \Delta N_a^{(0)} \rangle) \} = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Система уравнений (11)–(15) фактически представляет собой другую запись уравнения (I) [с точностью до членов второго порядка малости по полю электромагнитной волны  $\mathbf{F}^{(1)}$ ; при  $\mathbf{F}^{(1)} = 0$  уравнения (11) и (14) тождественны уравнению (I)].

Обычное упрощение полученных уравнений (или эквивалентных им) связано с использованием условия малости энергии взаимодействия по сравнению с кинетической энергией зарядов ( $e^2 n^{1/3} \ll m\bar{v}^2$ ). При этом условии члены в круглых скобках в уравнениях (14) и (15) можно опустить. Будем также предполагать, что частота колебаний электромагнитной волны  $\mathbf{F}^{(1)}$  значительно превышает частоту столкновений. Тогда можно опустить и произведения флуктуирующих величин (учитывающие «столкновения») в уравнении (12). Окончательная система уравнений для функций распределения принимает вид:

$$\widehat{K}N_a^{(0)} + \frac{\partial}{\partial p} (\langle \Delta\mathbf{F}^{(0)} \Delta N_a^{(0)} \rangle) = 0; \quad (1a)$$

$$\widehat{K} \Delta N_a^{(0)} + \frac{\partial}{\partial p} (\Delta\mathbf{F}^{(0)} N_a^{(0)}) = 0; \quad (1б)$$

$$\widehat{K}N_a^{(1)} + \frac{\partial}{\partial p} (\mathbf{F}^{(1)} N_a^{(0)}) = 0; \quad (1в)$$

$$\widehat{K} \Delta N_a^{(1)} + \frac{\partial}{\partial p} (\Delta\mathbf{F}^{(1)} N_a^{(0)} + \mathbf{F}^{(1)} \Delta N_a^{(0)} + \Delta\mathbf{F}^{(0)} N_a^{(1)}) = 0. \quad (1г)$$

Уравнения для  $\Delta N_a^{(0)}$  и  $\Delta N_a^{(1)}$  удобно разбить каждое на две части. Выделим из  $\Delta N_a^{(0)}$  часть, связанную с взаимодействием  $\Delta \mathbf{F}^{(0)}$ :

$$\Delta N_a^{(0)} = \Delta N_a^{00} + \Delta N_a (\Delta \mathbf{F}^{(0)}); \quad (16)$$

$$\hat{K} \Delta N_a^{00} = 0; \quad (17)$$

$$\hat{K} \Delta N_a (\Delta \mathbf{F}^{(0)}) + \frac{\partial}{\partial p} (\Delta \mathbf{F}^{(0)} N_a^{(0)}) = 0. \quad (18)$$

Уравнение (17) описывает флуктуации в системе зарядов, движущихся во внешнем  $\mathbf{F}_e$  и усредненном (самосогласованном)  $\mathbf{F}^{(0)}$  полях, но не взаимодействующих микроскопически. Его решение имеет вид

$$\Delta N_a^{00} = \sum_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{ai}^{(0)}(t)) \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_{ai}^{(0)}(t)) - N_a^{(0)}. \quad (19)$$

Из определения оператора  $\hat{K}$  (10) следует, что  $\mathbf{r}_{ai}^0(t)$  и  $\mathbf{v}_{ai}^0(t)$  определяются уравнениями

$$\frac{d\mathbf{p}_{ai}^0(t)}{dt} = \mathbf{F}_e(\mathbf{r}_{ai}^0(t), t) + \mathbf{F}^0(\mathbf{r}_{ai}^0(t), t); \quad (20)$$

$$\frac{d\mathbf{r}_{ai}^0(t)}{dt} = \mathbf{v}_{ai}^0(t). \quad (21)$$

Уравнение (18) разделим на две части следующим образом:

$$\Delta N_a^{(1)} = \delta N_a + \Delta N_a (\Delta \mathbf{F}^{(1)}); \quad (22)$$

$$\hat{K} \delta N_a + \frac{\partial}{\partial p} (\mathbf{F}^{(1)} \Delta N_a^{(0)} + \Delta \mathbf{F}^{(0)} N_a^{(1)}) = 0; \quad (23)$$

$$\hat{K} \Delta N_a (\Delta \mathbf{F}^{(1)}) + \frac{\partial}{\partial p} (\Delta \mathbf{F}^{(1)} N_a^{(0)}) = 0. \quad (24)$$

Произведенное разбиение позволяет ввести «сторонние» токи — микроскопический ток

$$\mathbf{j}^M = \int \sum_a e_a \mathbf{v}_a \Delta N_a^{00} d\mathbf{p}_a = \sum_{i, a} e_a \mathbf{v}_{ai}(t) \delta(\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_{ai}^0(t)) - \mathbf{j}^0, \quad (25)$$

являющийся источником флуктуационных полей  $\Delta \mathbf{F}^{(0)}$ , и индуцированный электромагнитной волной  $\mathbf{F}^{(1)}$  ток

$$\delta \mathbf{j} = \int \sum_a e_a \mathbf{v}_a \delta N_a d\mathbf{p}_a, \quad (26)$$

являющийся источником рассеяния волны  $\mathbf{F}^{(1)}$ .

Теперь удобно объединить уравнения Максвелла для  $\mathbf{F}^{(1)}$ ,  $\Delta \mathbf{F}^{(0)}$  и  $\Delta \mathbf{F}^{(1)}$ . Введем обозначение для суммы этих полей

$$\mathbf{E} = \mathbf{F}^{(1)} + \Delta \mathbf{F}^{(0)} + \Delta \mathbf{F}^{(1)} \quad (27)$$



и для суммы соответствующих функций распределения

$$f_a^{(1)}(\mathbf{E}) = N_a^{(1)} + \Delta N_a(\Delta \mathbf{F}^{(1)}) + \Delta N_a^0(\Delta \mathbf{F}^0). \quad (28)$$

Суммируя уравнения (IIб)—(IIг), а также (Iб)—(Iг), получим

$$\hat{M}\mathbf{E} - \mathbf{j}(\mathbf{E}) = \mathbf{j}^M + \delta \mathbf{j}; \quad (29)$$

$$\mathbf{j}(\mathbf{E}) = \int \sum_a e_a \mathbf{v}_a f_a^{(1)} d\mathbf{v}_a; \quad (30)$$

$$\hat{K}f_a^{(1)} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{E}f_a^0) = 0. \quad (31)$$

При  $\mathbf{j}^0 = 0$  (однородная плазма) и  $\delta \mathbf{j} = 0$  (пренебрежение рассеянием) полученная система совпадает с теми уравнениями, которые использовались в тексте (§ 6, 9 и 13).

Флуктуационное поле  $\Delta \mathbf{F}^0$ , входящее в уравнения (23) и (Iа), определяется уравнениями (29) при  $\delta \mathbf{j} = 0$  [которым и соответствуют использованные в тексте уравнения (6. 1)]. Флуктуационная часть функции распределения  $\Delta N_a(\Delta \mathbf{F}^0)$ , связанная с взаимодействием зарядов, как видно из сравнения уравнений (18) и (31), удовлетворяет такому же точно уравнению, как и для поправки к функции распределения, вызванной электромагнитной волной.

Система уравнений (29)—(31) записана в символической форме. В явном виде она выглядит так:

$$\text{rot } \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}(\mathbf{E}) = \frac{4\pi}{c} (\mathbf{j}^M + \delta \mathbf{j}); \quad (32)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0; \quad (33)$$

$$\text{div } \mathbf{E} - 4\pi \rho(\mathbf{E}) = 4\pi (\rho^M + \delta \rho); \quad (34)$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0; \quad (35)$$

$$\mathbf{j}(\mathbf{E}) = \sum_a \int e_a \mathbf{v}_a f_a^{(1)} d\mathbf{p}_a; \quad \rho(\mathbf{E}) = \sum_a \int e_a f_a^{(1)} d\mathbf{p}_a; \quad (36)$$

$$\frac{\partial f_a^{(1)}}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f_a^{(1)}}{\partial \mathbf{r}} + e \left( \mathbf{E}^0 + \frac{1}{c} [\mathbf{vB}^0] \right) \frac{\partial f_a^{(1)}}{\partial \mathbf{p}} = -e_a \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{vB}] \right) \frac{\partial f_a^0}{\partial \mathbf{p}}. \quad (37)$$

Сторонние плотности тока и заряда определяются по формулам (25), (20), (21) и (26), (23).

$$\mathbf{j}^M = \sum_a e_a \mathbf{v}_{ai}(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{ai}(t)) - \mathbf{j}^0; \quad \rho^M = \sum_a e_a \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{ai}^0(t)) - \rho^0; \quad (38)$$

$$\frac{d\mathbf{r}_{ai}^0(t)}{dt} = \mathbf{v}_{ai}^0(t) = \frac{\mathbf{p}_{ai}^0(t)}{m_a}; \quad \frac{d\mathbf{p}_{ai}^0}{dt} = e_a \left( \mathbf{E}^0 + \frac{1}{c} [\mathbf{vB}^0] \right); \quad (39)$$

$$\delta \mathbf{j} = \int \sum_a e_a \mathbf{v}_a \delta N_a d\mathbf{v}; \quad \delta \rho = \int \sum_a e_a \delta N_a d\mathbf{v}; \quad (40)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \delta N}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial \delta N}{\partial \mathbf{r}} + e \left( \mathbf{E}^0 + \frac{1}{c} [\mathbf{vB}^0] \right) \frac{\partial \delta N}{\partial \mathbf{p}} = \\ & = - \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \left\{ e_a \left( \mathbf{E}^{(1)} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_a \mathbf{B}^{(1)}] \right) \Delta N_a^{(0)} + e_a \left( \mathbf{E}^M + \frac{1}{c} [\mathbf{vB}^M] \right) f_a^{(1)}(\mathbf{E}^{(1)}) \right\}. \end{aligned} \quad (41)$$

Здесь  $\mathbf{E}^{(1)}$  и  $\mathbf{V}^{(1)}$  — решения однородных уравнений Максвелла (32)—(35);  $\mathbf{E}_M$  и  $\mathbf{V}^M$  — микроскопические поля — решение уравнений (32)—(35) при  $\delta \mathbf{j} = 0$ ;  $f_a^{(1)}(\mathbf{E}^{(1)})$  — решение уравнения (37), в правую часть которого вместо  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{V}$  входят  $\mathbf{E}^{(1)}$  и  $\mathbf{V}^{(1)}$ . Входящие в уравнения (37), (38), (39) и (41) средние величины  $f_a^0$ ,  $\mathbf{E}^0$ ,  $\mathbf{V}^0$  и  $\mathbf{j}^0$  являются решением уравнений (IIa) и (Ia). Эти уравнения представляют собой систему самосогласованных уравнений Максвелла и кинетического уравнения со столкновительным членом:

$$\text{rot } \mathbf{V}^0 - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}^0}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}^0;$$

$$\text{rot } \mathbf{E}^0 + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}^0}{\partial t} = 0;$$

$$\text{div } \mathbf{E}^0 = 4\pi \varrho^0;$$

$$\text{div } \mathbf{B}^0 = 0;$$

$$f^0 = \sum_a e_a \mathbf{v} f_a^0 dv; \quad \varrho^0 = \sum_a e_a f_a^0 dv;$$

$$\frac{\partial f_a^0}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f_a^0}{\partial \mathbf{r}} + e \left( \mathbf{E}^0 + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \mathbf{B}^0] \right) \frac{\partial f_a^0}{\partial \mathbf{p}} = S(f_a^0);$$

$$S(f_a^0) \equiv - \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \left\langle e_a \left( \mathbf{E}^M + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \mathbf{B}^M] \right) \Delta N_a^0 \right\rangle;$$

$$\Delta N_a^0 = \sum_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{ai}^0(t)) \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_{ai}^0(t)) - f_a^0 + f_a^{(1)}(\mathbf{E}^M).$$

Здесь  $\mathbf{E}^M$ ,  $\mathbf{V}^M$  и  $b^{(1)}(\mathbf{E}^M)$  имеют такой же смысл, как и в предыдущей системе уравнений.

## ЛИТЕРАТУРА

1. В л а с о в А. А. Теория многих частиц. М. — Л., Гостехиздат, 1950.
2. Л а н д а у Л. Д. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **16**, 574 (1946).
3. А х н е з е р А. И. и Ф а й н б е р г Я. Б. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **21**, 1262 (1951).
4. В о h m D., G r o s s E. P. Phys. Rev., **75**, 1851 (1949); **75**, 1864 (1949).
5. G r o s s E. P. Phys. Rev., **82**, 232 (1951).
6. Г о р д е е в Г. В. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **27**, 19 (1954).
7. Г е р ш м а н Б. Н. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **24**, 453 (1953); **24**, 659 (1953).
8. Г е р ш м а н Б. Н., Г и н з б у р г В. Л. и Д е н и с о в Н. Г. «Усп. физ. наук», **61**, 561 (1957).
9. Б р а г и н с к и й С. И. «Докл. АН СССР», **115**, 475 (1957).
10. В е р n s t e i n I. V. Phys. Rev., **109**, 10 (1958).
11. Г е р ш м а н Б. Н. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **37**, 659 (1959).
12. Г е р ш м а н Б. Н. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **38**, 912 (1960).
13. Г и н з б у р г В. Л. Теория распространения радиоволн в ионосфере. М., Гостехиздат, 1949.
14. Г е р ц е н ш т е й н М. Е. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **22**, 303 (1952).
15. Г а л и ц к и й В. М. и М и г д а л А. Б. Диэлектрическая постоянная высокотемпературной замагниченной плазмы и оценка лучистой теплопроводности. В кн. «Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций». Т. I. М., Изд-во АН СССР, 1958, стр. 16.

16. Ситенко А. Г., Степанов К. Н. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **31**, 642 (1956).
17. Шафранов В. Д. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **34**, 1475 (1958).
18. Трубников Б. А. Электромагнитные волны в релятивистской плазме при наличии магнитного поля. В кн. «Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций» Т. III. М., Изд-во АН СССР, 1958, стр. 104.
19. Сагдеев Р. З., Шафранов В. Д. Поглощение высокочастотного электромагнитного поля в высокотемпературной плазме. В кн. «Тр. Второй международной конференции по мирному использованию атомной энергии». Докл. советских ученых. Т. 1 — «Ядерная физика». М., Атомиздат, 1959, стр. 202.
20. Брагинский С. И., Казанцев А. П. Магнитогиродинамические волны в разреженной плазме. В кн. «Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций» Т. IV. М., Изд-во АН СССР, 1958, стр. 24.
21. Степанов К. Н. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **34**, 1292 (1958).
22. Силин В. П. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **38**, 1577 (1960).
23. Veerpstein I. V., Trehan S. K. Nucl. Fusion, **1**, 3 (1960).
24. Днестровский Ю. Н., Костомаров Д. П. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **39**, 845 (1960); **40**, 1444 (1961); **41**, 1527 (1961).
25. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1957.
26. Рытов С. М. Теория электрических флуктуаций и теплового излучения. М., Изд-во АН СССР, 1953.
27. Бункин Ф. В. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **32**, 811 (1957).
28. Шафранов В. Д. К выводу тензора диэлектрической проницаемости плазмы. В кн. «Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций» Т. IV. М., Изд-во АН СССР, 1958, стр. 416.
29. Климонтович Ю. Л. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **34**, 173 (1958).
30. Климонтович Ю. Л., Силин В. П. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **42**, 286 (1962).
31. Климонтович Ю. Л. Диссертация. МГУ, 1962.
32. Силин В. П. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **40**, 1768 (1961).
33. Thompson W. V., Hubbard I. «Rev. Mod. Phys.» **32**, 714 (1960).
34. Hubbard I. Proc. Roy. Soc., A, **260**, 114 (1960); A, **261**, 369 (1961).
35. Rostoker N. Nucl. Fusion, **1**, 101 (1961).
36. Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. М., Физматгиз, 1960.
37. Силин В. П., Рухадзе А. А. Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред. М., Госатомиздат, 1961.
38. Stix T. H. The Theory of Plasma Waves. Mc Craw-Hill Company Inc., 1962.
39. Леонтович М. А. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **40**, 907 (1961).
40. Гинзбург В. Л. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **10**, 601 (1940).
41. Коломенский А. А. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **24**, 167 (1953).
42. Фадеева В. Н., Терентьев Н. М. Таблицы значений интеграла вероятностей. М., Гостехиздат, 1954.
43. Михайловский А. Б. «Ядерный синтез», **2**, 162 (1962).
44. Ахизер А. И. и Ситенко А. Г. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **23**, 161 (1951).
45. Цытович В. Н. «Вестник МГУ», **11**, 27 (1951).
46. Ситенко А. Г. и Коломенский А. А. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **30**, 511 (1956).
47. Бункин Ф. В. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **32**, 338 (1957).
48. Эйрман В. Я. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **34**, 131 (1958); **36**, 1335 (1949).
49. Гинзбург В. Л., Железников В. В. «Изв. высш. учебн. заведений, Радиофизика», **1**, № 2, 59 (1958).
50. Гинзбург В. Л. «Усп. физ. наук», **19**, 537 (1959).
51. Степанов К. Н., Пахомов В. И. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **38**, 1564 (1960).
52. Пистунович В. И., Шафранов В. Д. «Ядерный синтез», **1**, 189 (1961).

53. Пахомов В. И., Алексин В. Ф. и Степанов К. Н. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 31, 1170 (1961).
  54. Kihara T., Aono O., Sugihara R. Nucl. Fusion, 1, 181 (1961).
  55. Пахомов В. И., Степанов К. Н. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 42, 2153 (1962).
  56. Бажанова А. Е., Шафранов В. Д. «Докл. АН СССР», 149, 1049 (1963).
  57. Пахомов В. И., Степанов К. Н. «Ж. техн. физ.», 33, 437 (1963).
  58. Ахиезер А. И., Ахиезер И. А., Ситенко А. Г. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 41, 644 (1961).
  59. Ахиезер А. И., Прохода И. Г., Ситенко А. Г. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 33, 750 (1957).
  60. Rosenbluth N. N., Rostoker N. Phys. Fluids 5, 776 (1962).
  61. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Статистическая физика. М., Гостехиздат, 1951, стр. 251.
  62. Рытов С. М. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 17, 930 (1947).
  63. Герценштейн М. Е. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 26, 680 (1954).
  64. Гершман Б. Н. и Гинзбург В. Л. «Изв. высш. учебн. заведений». Радиофизика, 5, 31 (1962).
  65. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1954.
  66. Франк-Каменецкий Д. А. «Ж. Эксперим. и теор. физ.», 39, 669 (1960).
  67. Франк-Каменецкий Д. А. Теория магнитозвукового резонанса в плазме. Доклад, представленный на конференцию по физике плазмы и контролируемым термоядерным реакциям. Зальцбург, сентябрь, 1961.
  68. Веденов А. А., Велихов Е. П., Сагдеев Р. З. «Усп. физ. наук» 73, 701 (1961).
  69. Грубников Б. А. Столкновение частиц с помощью ионизированной плазмы. В кн. «Вопросы теории плазмы». Вып. I. М., Госатомиздат, 1963.
-

# КОЛЕБАНИЯ НЕОДНОРОДНОЙ ПЛАЗМЫ

*А. Б. Михайловский*

## Введение

В настоящей работе излагаются вопросы теории колебаний неоднородной плазмы.

В работе В. Д. Шафранова [1] уже были рассмотрены некоторые свойства колебаний плазмы, в предположении, что эффекты неоднородности равновесных параметров плазмы несут существенны. Как будет показано ниже, такой подход оправдан, если фазовая скорость колебаний  $\omega/k$  значительно превосходит дрейфовые скорости частиц  $v_{др} \sim \frac{e}{a} v_T$  ( $e$  — ларморовский радиус частиц,  $v_T$  — их тепловая скорость,  $a$  — характерный размер неоднородности плазмы). В последнее время, однако, выяснилось важное значение и более медленных волн,  $\omega/k \lesssim v_{др}$ , обычно называемых дрейфовыми волнами, так как оказалось, что с ними связаны некоторые типы неустойчивостей плазмы. Основное внимание в настоящей работе уделяется именно таким медленным волнам.

Мы предполагаем, что читатель знаком с теорией колебаний однородной плазмы в объеме указанной выше работы В. Д. Шафранова. Исходя из этого, мы будем пользоваться в основном таким же методом исследования и той же системой обозначений, как и в работе [1].

## § 1. Диэлектрическая проницаемость неоднородной плазмы

Общее выражение для плотности электрического тока, индуцируемого в плазме электромагнитным полем малой амплитуды, приведено, например, в § 9 работы [1]. В случае нерелятивистской плазмы, удерживаемой постоянным магнитным полем, направленным по оси  $z$ , и неоднородной в направлении  $y$ , плотность тока можно представить в виде

$$j_{\alpha}(r, t) = \int dk d\omega \left\{ \frac{\omega}{4\pi i} (\epsilon_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta}) e^{i(kr - \omega t)} E_{\beta}(k, \omega) \right\}, \quad (1. 1)$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega, y) = & \\ = \delta_{\alpha\beta} - i \sum_{i, e} \frac{4\pi e^2}{m\omega} \int d\mathbf{v}_0 v_{\alpha}(t) \int_{-\infty}^t \frac{\partial F_0}{\partial v_{\gamma}(t')} \left\{ \left( 1 - \frac{\mathbf{k}\mathbf{v}(t')}{\omega} \right) \delta_{\gamma\beta} + \right. & \\ \left. + \frac{k_{\gamma} v_{\beta}(t')}{\omega} \right\} \times e^{i \left[ \omega(t-t') - \mathbf{k} \int_{t'}^t \mathbf{v}(t'') dt'' \right]} dt'. & \quad (1.2) \end{aligned}$$

Используемые здесь обозначения те же, что и в работе [1]\*. Таким образом, плотность тока в неоднородной плазме очень просто связана с величиной  $\varepsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega, y)$ , аналогичной тензору диэлектрической проницаемости однородной плазмы в представлении  $\mathbf{k}, \omega$ .

Ясно, что вид  $\varepsilon_{\alpha\beta}$  существенно зависит от закона движения отдельных частиц плазмы в равновесных полях. Если рассматривать участок плазмы, на котором равновесное электрическое поле равно нулю ( $\mathbf{E}^0 = 0$ ), и если давление плазмы мало по сравнению с магнитным давлением ( $\beta = 8\pi p/B_0^2 \ll 1$ ), так что величинами типа  $\nabla B_0$  можно пренебречь, то закон движения частиц (электронов, ионов) будет таким же, как и в однородной плазме: каждая частица вращается по ларморовской окружности в плоскости, перпендикулярной к силовым линиям, и движется с постоянной скоростью вдоль силовых линий. Поэтому специфический характер неоднородной плазмы низкого давления с  $\mathbf{E}^0 = 0$ , как диэлектрической среды, определяется, как это следует из выражения (1.2), только видом равновесной функции распределения  $F_0$ .

Ясно, что  $F_0$  не может быть совершенно произвольной функцией координат и скоростей; она должна удовлетворять равновесному кинетическому уравнению

$$\mathbf{v} \nabla F_0 + [\mathbf{v}_0, \boldsymbol{\omega}_B] \frac{\partial F_0}{\partial \mathbf{v}} = 0 \quad (1.3)$$

или, что то же самое, быть функцией только интегралов движения — величин, сохраняющихся при движении частицы. Из уравнений движения

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = [\mathbf{v}, \boldsymbol{\omega}_B], \quad \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v} \quad (1.4)$$

следует, что интегралами движения, не содержащими времени явно, являются: полная энергия частицы  $\varepsilon = mv^2/2$ , продольная скорость частицы  $V_z = v_z$  и величины  $Y = y - v_x/\omega_B$  и  $X = x + v_y/\omega_B$ . Поэтому наиболее общим видом равновесной функ-

\* Кроме функции  $F_0$ , которая здесь представляет собой функцию распределения, отнесенную к единице объема, а в работе [1] — к одной частице.

ции распределения, зависящей только от одной из координат ( $y$ ), является

$$F_0(\mathbf{v}, y) = f_0\left(\varepsilon, V_z, y - \frac{v_x}{\omega_B}\right), \quad (1.5)$$

где  $f_0$  — функция произвольного вида.

Смысл  $f_0$  весьма прост: это функция распределения ларморовских центров вращающихся частиц. Если считать ларморовский радиус частиц пренебрежимо малым ( $\varrho = v_{\perp}/\omega_B \rightarrow 0$ ), то число частиц в точке  $y$  совпадает с числом центров кружков в этой же точке ( $F_0(y) = f_0(y)$ ); при конечных  $\varrho$  числа частиц и кружков различны. Это обстоятельство приводит, например, к тому, что в неоднородной плазме могут течь токи поперек магнитного поля, хотя в среднем каждая отдельная частица и не смещается (т. е. центры кружков стоят на месте). Действительно, предполагая  $v_x/\omega_B$  малым, разлагая в ряд правую часть равенства (1.5) и интегрируя уравнение (1.5) после умножения на  $v_x$ , можно получить

$$n_0 v_{0x} = \int F_0 v_x d\mathbf{v} = -\frac{1}{\omega_B} \frac{\partial}{\partial y} \int f_0 v_x^2 d\mathbf{v} = -\frac{1}{\omega_B} \frac{\partial p_{\perp}}{\partial y} \neq 0. \quad (1.6)$$

Эти явления подробно обсуждаются в работе Брагинского [2]. Все эффекты, которые в дальнейшем будут рассматриваться в настоящей работе, также определяются этими свойствами (вызывавшими в свое время парадоксы) неоднородной плазмы — наличием равновесных потоков в направлении, поперечном магнитному полю и направлению неоднородности, в условиях, когда все частицы в среднем покоятся.

Выяснив связь функций  $F_0$  и  $f_0$  [уравнение (1.5)], возвратимся к главной задаче настоящего параграфа — вычислению тензора (1.2), что позволит в дальнейшем рассматривать задачи о колебаниях. Ограничимся более простым видом функции  $f_0$ , положив ее независимой от интеграла движения  $V_z$ , т. е. исключим из рассмотрения неизотропную плазму и плазму с пучками (тензор  $\varepsilon_{\alpha\beta}$  для случая  $dF_0/dV_z \neq 0$  вычислен в приложении I).

Тогда

$$\frac{\partial F_0}{\partial v_{\gamma}} = \frac{\partial F_0}{\partial \varepsilon} m v_{\gamma} - \frac{\partial F_0}{\partial Y} \frac{1}{\omega_B} \delta_{\gamma x}. \quad (1.7)$$

Величины  $\partial F_0/\partial \varepsilon$  и  $\partial F_0/\partial Y$  являются интегралами движения и могут быть вынесены за знак интеграла по  $t'$  в уравнении (1.2), так что

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^t dt' \frac{\partial F_0}{\partial v_{\gamma}(t')} \left\{ \left(1 - \frac{\mathbf{k}\mathbf{v}(t')}{\omega}\right) \delta_{\gamma\beta} + \frac{k_{\gamma} v_{\beta}(t')}{\omega} \right\} A(t, t') dt' = \\ = m \frac{\partial F_0}{\partial \varepsilon} \int_{-\infty}^t v_{\beta}(t') A(t, t') dt' - \\ - \frac{1}{\omega_B} \frac{\partial F_0}{\partial Y} \int_{\infty}^t \left\{ \left(1 - \frac{\mathbf{k}\mathbf{v}(t')}{\omega}\right) \delta_{\beta x} + \frac{k_x v_{\beta}(t')}{\omega} \right\} A(t, t') dt'; \quad (1.8) \\ A(t, t') = e^{i \left[ \omega(t-t') - \mathbf{v} \int_{t'}^t \mathbf{k}(t'') dt'' \right]}. \end{aligned}$$

Последнее слагаемое правой части можно привести к более простому виду, если воспользоваться тождеством

$$\frac{d}{dt'} A(t, t') = -i[\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}(t')] A(t, t').$$

Поэтому первый член в фигурных скобках правой части уравнения (1. 8) дает интеграл от полной производной по времени; таким образом, получим

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega, y) = & \delta_{\alpha\beta} - i \sum_{i, e} \frac{4\pi e^2}{m\omega} \int d\mathbf{v}_0 v_{\alpha}(t) \times \\ & \times \left[ \left( m \frac{\partial F_0}{\partial \varepsilon} - \frac{k_x}{\omega\omega_B} \frac{\partial F_0}{\partial Y} \right) \int_{-\infty}^t v_{\beta}(t') A(t, t') dt' - \frac{i\delta_{\beta x}}{\omega\omega_B} \frac{\partial F_0}{\partial Y} \right]. \end{aligned} \quad (1. 9)$$

Сравним это выражение с соответствующим результатом для однородной плазмы ( $\partial F_0/\partial Y = 0$ ). Отличие состоит в том, что вместо члена  $m\partial F_0/\partial \varepsilon$ , входящего в  $\varepsilon_{\alpha\beta}$  для однородной плазмы (см. работу [1]), в случае неоднородной плазмы мы имеем комбинацию

$$m \frac{\partial F_0}{\partial \varepsilon} - \frac{k_x}{\omega\omega_B} \frac{\partial F_0}{\partial Y}. \quad (1. 10)$$

Второй член существен по сравнению с первым, если

$$\frac{k_x |v_{др}|}{\omega_j} \equiv \left| \frac{k_x}{\omega\omega_B} \frac{1}{n_0} \frac{\partial p}{\partial y} \right| \gtrsim 1. \quad (1. 11)$$

Это соотношение имеет очень наглядный смысл, если иметь в виду также уравнение (1. 6): члены с неоднородностью существенны, если скорость ларморовского дрейфа не слишком мала по сравнению с фазовой скоростью волны вдоль направления  $x$ , т. е.  $v_{др} \gtrsim \omega/k_x$ . Именно в этой области фазовых скоростей и следует ожидать проявления своеобразных свойств колебаний неоднородной плазмы.

Для плазмы, слабо неоднородной на ларморовском радиусе частиц, функцию  $f_0$  в уравнении (1. 5) можно разложить в ряд по  $v_x/\omega_B$ , так что в этом случае выражение (1. 10) принимает еще более простой вид:

$$m \frac{\partial F_0}{\partial \varepsilon} - \frac{k_x}{\omega\omega_B} \frac{\partial F_0}{\partial Y} = \Phi - \frac{v_x(t)}{\omega_B} \frac{\partial \Phi}{\partial y}. \quad (1. 12)$$

Здесь

$$\Phi = \Phi(v^2, y) = m \frac{\partial f_0(\varepsilon, y)}{\partial \varepsilon} - \frac{k_x}{\omega\omega_B} \frac{\partial f_0(\varepsilon, y)}{\partial y}. \quad (1. 13)$$



Подставляя эти выражения в уравнение (1. 9) и представляя  $d\mathbf{v}_0$  в виде  $d\mathbf{v}_0 = dv_{\perp 0}^2 dv_{z0} d\alpha_0$ , получим

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + \sum_{i, e} \frac{4\pi e^2}{m\omega} \left[ 2\pi \int dv_{\perp 0}^2 dv_{z0} \left( \Phi Q_{\alpha\beta} - \frac{1}{\omega_B} \frac{\partial \Phi}{\partial y} P_{\alpha\beta} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\delta_{\alpha x} \delta_{\beta x}}{\omega \omega_B^2} \int \frac{v_{\perp 0}^2}{2} \frac{\partial^2 f_0}{\partial y^2} dv_0 \right], \quad (1. 14)$$

где

$$Q_{\alpha\beta} = -\frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\alpha_0 v_\alpha(t) \int_{-\infty}^t v_\beta(t') A(t, t') dt'; \quad (1. 15)$$

$$P_{\alpha\beta} = -\frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\alpha_0 v_\alpha(t) v_x(t) \int_{-\infty}^t v_\beta(t') A(t, t') dt'. \quad (1. 16)$$

Вычисление тензоров  $Q_{\alpha\beta}$  и  $P_{\alpha\beta}$  производится следующим образом. Пользуясь уравнениями движения (1. 4), находим

$$\left. \begin{aligned} v_x(t) &= v_{\perp 0} \cos(\alpha_0 - \omega_B t); \\ v_y(t) &= v_{\perp 0} \sin(\alpha_0 - \omega_B t); \\ v_z(t) &= v_{z0}. \end{aligned} \right\} \quad (1. 17)$$

Тогда

$$\mathbf{k} \int_{t'}^t \mathbf{v}(t'') dt'' = \\ = \xi [\sin(\alpha_0 - \omega_B t' - \psi) - \sin(\alpha_0 - \omega_B t - \psi)] + k_z v_{z0} (t - t'). \quad (1. 18)$$

Здесь  $\xi = k_{\perp} v_{\perp 0} / \omega_B$ ,  $k_{\perp} = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ ,  $\psi = \text{arctg}(k_y/k_x)$ . Экспоненту  $\exp[-i\xi \sin(\alpha_0 - \omega_B t' - \psi)]$  представляем в виде ряда по функциям Бесселя [3]:

$$\exp[-i\xi \sin(\alpha_0 - \omega_B t' - \psi)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\xi) e^{-in(\alpha_0 - \omega_B t' - \psi)}.$$

Затем интегрируем по  $t'$ , получая, например:

$$Q_{\alpha\beta} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\alpha_0 v_\alpha(t) e^{i\xi \sin(\alpha_0 - \omega_B t - \psi)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} q_\beta \zeta_n e^{-in(\alpha_0 - \omega_B t - \psi)} \quad (1. 19)$$

и аналогично для  $P_{\alpha\beta}$ . Здесь функция  $\zeta_n \equiv \zeta_n(\omega - n\omega_B - k_z v_{z0})$  имеет тот же смысл, что и в § 9 работы [1]:

$$\zeta(x) = \frac{P}{x} - i\pi\delta(x). \quad (1. 20)$$

Вектор  $q_\beta$  имеет компоненты

$$\left. \begin{aligned} q_x &= v_{\perp 0} \left( \frac{nJ_n}{\xi} \cos \psi - iJ'_n \sin \psi \right), \\ q_y &= v_{\perp 0} \left( iJ'_n \cos \psi + \frac{nJ_n}{\xi} \sin \psi \right), \\ q_z &= v_{z0} J_n. \end{aligned} \right\} \quad (1.21)$$

Далее производим усреднение по  $\alpha_0$ , используя соотношения [3]:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dx e^{i\xi \sin x - inx} = J_n(\xi). \quad (1.22)$$

В результате получаем

$$Q_{\alpha\beta} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \zeta_n q_\alpha^* q_\beta; \quad (1.23)$$

$$P_{\alpha\beta} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \zeta_n p_\alpha q_\beta, \quad (1.24)$$

где  $q_\alpha^*$  — вектор, комплексно сопряженный с  $q_\alpha$ , а вектор  $p_\alpha$  имеет компоненты:

$$\left. \begin{aligned} p_x &= \frac{v_{\perp 0}^2}{2} \left[ J_n + (J_n + 2J'_n) \cos 2\psi + 2in \left( \frac{J_n}{\xi} \right)' \sin 2\psi \right]; \\ p_y &= \frac{v_{\perp 0}^2}{2} \left[ -2in \left( \frac{J_n}{\xi} \right)' \cos 2\psi + (J_n + 2J'_n) \sin 2\psi \right]; \\ p_z &= v_{\perp 0} v_{z0} \left( \frac{nJ_n}{\xi} \cos \psi + iJ'_n \sin \psi \right). \end{aligned} \right\} \quad (1.25)$$

Таким образом, выражение для токов, индуцируемых в слабо неоднородной плазме низкого давления с изотропной по скоростям функцией ларморовских центров частиц, найдено. Оно определяется формулами (1. 1), (1. 14), (1. 13), (1. 23), (1. 24), (1. 20), (1. 21) и (1. 25).

Особый интерес представляет случай, когда  $f_0$  является максвелловской функцией  $f_0 = n_0 \left( \frac{m}{2\pi T} \right)^{3/2} e^{-\varepsilon/T}$ , поскольку она наиболее «равновесная» в пространстве скоростей. При этом интегрирование по скоростям в уравнении (1. 14) производится так. Интегралы по  $dv_{z0}$  берутся с помощью формулы (см. приложение II в работе [1]):

$$\left( \frac{m}{2\pi T} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dv_{z0} e^{-mv_{z0}^2/2T}}{\omega - n\omega_B - k_z v_{z0}} = -i \frac{\sqrt{\pi}}{k_z v_T} W \left( \frac{\omega - n\omega_B}{k_z v_T} \right), \quad (1.26)$$

где

$$W(x) = e^{-x^2} \left( 1 + \frac{2i}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{t^2} dt \right); \quad v_T = \sqrt{\frac{2T}{m}}; \quad (1.27)$$

$W$  — функция Крампа от комплексного аргумента, табулированная в книге [4].

При интегрировании по поперечной скорости пользуемся формулой [3]

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} e^{-\sigma^2 x^2} J_n(\alpha x) J_n(\beta x) x dx = \\ & = \frac{1}{2\sigma^2} \exp\left(-\frac{\alpha^2 + \beta^2}{4\sigma^2}\right) I_n\left(\frac{\alpha\beta}{2\sigma^2}\right), \end{aligned} \quad (1.28)$$

где  $I_n$  — функция Бесселя мнимого аргумента. В результате получаем:

$$\begin{aligned} \epsilon_{\alpha\beta} = & \delta_{\alpha\beta} + \sum_{i, e} \left\{ \epsilon_{\alpha\beta}^I + \frac{k_x}{m\omega\omega_B} \cdot \frac{\partial}{\partial y} T \epsilon_{\alpha\beta}^I + \right. \\ & \left. + \frac{1}{k_{\perp}} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left( \epsilon_{\alpha\beta}^{II} + \frac{k_x}{m\omega\omega_B} \cdot \frac{\partial}{\partial y} T \epsilon_{\alpha\beta}^{II} \right) \right\} + \\ & + \delta_{\alpha x} \delta_{\beta x} \sum_{i, e} \frac{4\pi e^2}{m^2 \omega^2 \omega_B^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial y^2} n_0 T. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Компоненты  $\epsilon_{\alpha\beta}^I$  равны:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{xx}^I &= \epsilon_{xx}^0 \cos^2 \psi + \epsilon_{yy}^0 \sin^2 \psi; \\ \epsilon_{xy}^I &= \epsilon_{xy}^0 + (\epsilon_{xx}^0 - \epsilon_{yy}^0) \sin \psi \cos \psi; \\ \epsilon_{yx}^I &= \epsilon_{yx}^0 + (\epsilon_{xx}^0 - \epsilon_{yy}^0) \sin \psi \cos \psi; \\ \epsilon_{yy}^I &= \epsilon_{xx}^0 \sin^2 \psi + \epsilon_{yy}^0 \cos^2 \psi; \\ \epsilon_{xz}^I &= \epsilon_{xz}^0 \cos \psi - \epsilon_{yz}^0 \sin \psi; \\ \epsilon_{yz}^I &= \epsilon_{yz}^0 \cos \psi + \epsilon_{xz}^0 \sin \psi; \\ \epsilon_{zx}^I &= \epsilon_{zx}^0 \cos \psi - \epsilon_{zy}^0 \sin \psi; \\ \epsilon_{zy}^I &= \epsilon_{zy}^0 \cos \psi + \epsilon_{zx}^0 \sin \psi; \\ \epsilon_{zz}^I &= \epsilon_{zz}^0, \end{aligned} \right\} \quad (1.30)$$

где  $\epsilon_{\alpha\beta}^0$  совпадает по форме с тензором диэлектрической проницаемости однородной плазмы, вычисленным в системе координат,

В которой  $k_{\perp} = k_x$ , т. е.  $\psi = 0$ . Этот тензор хорошо известен и имеет вид:

$$\left. \begin{aligned}
 \varepsilon_{xx}^0 &= - \sum_n \frac{\omega_0^2}{\omega k_z v_T} (-i \sqrt{\pi} W_n) e^{-z} \frac{n^2}{z} I_n; \\
 \varepsilon_{xy}^0 &= - \varepsilon_{yx}^0 = i \sum_n \frac{\omega_0^2}{\omega k_z v_T} (-i \sqrt{\pi} W_n) e^{-z} n (I_n - I'_n); \\
 \varepsilon_{yy}^0 &= \varepsilon_{xx}^0 - \sum_n \frac{\omega_0^2}{\omega k_z v_T} (-i \sqrt{\pi} W_n) e^{-z} \cdot 2z (I_n - I'_n); \\
 \varepsilon_{xz}^0 &= \varepsilon_{zx}^0 = \sum_n \frac{\omega_0^2}{\omega \omega_B} \cdot \frac{k_x}{k_z} \left( + i \sqrt{\pi} W_n \right) x_n \frac{n}{z} e^{-z} I_n; \\
 \varepsilon_{yz}^0 &= - \varepsilon_{zy}^0 = i \sum_n \frac{\omega_0^2}{\omega \omega_B} \frac{k_y}{k_z} (-i \sqrt{\pi} W_n) x_n e^{-z} (I_n - I'_n); \\
 \varepsilon_{zz}^0 &= \sum_n \frac{2\omega_0^2}{\omega k_z v_T} e^{-z} I_n x_n (1 + i \sqrt{\pi} x_n W_n).
 \end{aligned} \right\} (1.31)$$

Здесь

$$z = \frac{k_{\perp}^2 T}{m \omega_B^2}; \quad x_n = \frac{\omega - n \omega_B}{k_z v_T}; \quad \omega_0^2 = \frac{4\pi e^2 n_0}{m}; \\
 W_n = W(x_n); \quad I_n = I_n(z).$$

Тензор  $\varepsilon_{\alpha\beta}^{II}$  не удается выразить через  $\varepsilon_{\alpha\beta}^0$ . Мы будем представлять его в виде выражения, не проинтегрированного по скоростям, так как операция интегрирования не приводит к упрощению записи.

Таким образом,

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^{II} = \frac{4\pi e^2 n_0}{\omega} \sum_n S_{\alpha\beta}; \quad (1.32)$$

$$S_{\alpha\beta} = \left( \frac{m}{2\pi T} \right)^{3/2} \frac{2\pi}{T} \int dv_{\perp 0}^2 dv_{z0} e^{-\varepsilon/T} \varepsilon_n \frac{\xi}{v_{\perp 0}} \rho_{\alpha} q_{\beta}. \quad (1.33)$$

В задачах о колебаниях плазмы часто вместо одного из уравнений Максвелла

$$(\text{rot rot } \mathbf{E})_{\alpha} = \frac{\omega^2}{c^2} \hat{\varepsilon}_{\alpha\beta} E_{\beta} \quad (1.34)$$

удобно использовать уравнение Пуассона

$$\text{div } \mathbf{E} = 4\pi \rho. \quad (1.35)$$

Плотность зарядов  $\rho$  с помощью уравнения непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0 \quad (1.36)$$

может быть выражена через плотность тока, так что

$$\rho = \int dk d\omega e^{i(kr - \omega t)} \chi_{\beta} E_{\beta}(\mathbf{k}), \quad (1.37)$$

где

$$\chi_{\beta}(\mathbf{k}, \omega, y) = \frac{1}{4\pi i} \left[ k_{\alpha} (\varepsilon_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta}) - i \frac{\partial \varepsilon_{y\beta}}{\partial y} \right]. \quad (1.38)$$

Для максвелловской  $f_0$  вектор  $\chi_{\beta}$  имеет вид

$$\begin{aligned} \chi_{\beta} = & \sum_{i, e} \left( \chi_{\beta}^I + \frac{k_x}{m\omega\omega_B} \frac{\partial}{\partial y} T \chi_{\beta}^I \right) + \\ & + \sum_{i, e} \frac{1}{k_{\perp}} \frac{\partial}{\partial y} \left( \chi_{\beta}^{II} + \frac{k_x}{m\omega\omega_B} \frac{\partial}{\partial y} T \chi_{\beta}^{II} \right). \end{aligned} \quad (1.39)$$

Здесь

$$\left. \begin{aligned} \chi_x^I &= \chi_x^0 \cos \psi - \chi_y^0 \sin \psi; \\ \chi_y^I &= \chi_y^0 \cos \psi + \chi_x^0 \sin \psi; \\ \chi_z^I &= \chi_z^0. \end{aligned} \right\} \quad (1.40)$$

Вектор  $\chi_{\beta}^0$  имеет компоненты

$$\left. \begin{aligned} \chi_x^0 &= \frac{ie^2 n_0}{T} \sum_n \frac{n\omega_B}{k_{\perp} k_z v_T} (-i \sqrt{\pi} W_n) I_n e^{-z}; \\ \chi_y^0 &= \frac{e^2 n_0}{T} \sum_n \frac{\omega_B}{k_{\perp} k_z v_T} (-i \sqrt{\pi} W_n) z (I'_n - I_n) e^{-z}; \\ \chi_z^0 &= -i \frac{e^2 n_0}{T k_z} \sum_n (1 + i \sqrt{\pi} x_n W_n) I_n e^{-z}. \end{aligned} \right\} \quad (1.41)$$

Вектор  $\chi_{\beta}^{II}$  имеет вид

$$\chi_{\beta}^{II} = -\frac{ie^2 n_0}{T} \sum_n 2\pi \int f_0 \frac{k_{\perp}}{\omega_B} q_x^* q_{\beta} \xi_n dv_{\perp 0}^2 dx_{z0}. \quad (1.42)$$

Выше мы выяснили, при каких фазовых скоростях волн диэлектрическая проницаемость неоднородной плазмы существенно отличается от проницаемости однородной плазмы [см. уравнение (1.11)]. Теперь качественно определим, при каких частотах  $\omega$  это отличие существенно. Для этого составим отношение «характерной дрейфовой частоты»  $\omega^* = k_x v_{др}$  к циклотронной частоте ионов  $\omega_{Bi}$  и выясним порядок величины этого отношения. Тогда

$$\frac{\omega^*}{\omega_{Bi}} \approx \frac{Q_i}{a} k_x Q_i. \quad (1.43)$$

Здесь мы воспользовались тем, что по порядку величины  $v_{др} \approx \approx \varrho_i v_{Ti}/a$  [см. уравнение (1.11)], где  $a$  — характерный размер неоднородности. Из выражения (1.43) видно, что  $\omega^*/\omega_{Bi} \ll 1$ , если

$$k_x \varrho_i \ll \frac{a}{\varrho_i}. \quad (1.44)$$

Справа стоит большая величина. Поэтому (во всяком случае для длин волн, больших или порядка ларморовского радиуса ионов) характерная дрейфовая частота значительно меньше циклотронной частоты ионов. При дальнейшем увеличении волнового числа отношение  $\omega^*/\omega_{Bi}$  будет оставаться малым вплоть до величины

$$\frac{k_x^*}{\varrho_i} \sim \frac{a}{\varrho_i^2}, \quad (1.45)$$

зависящей от степени неоднородности плазмы.

Удобно ввести понятия слабо неоднородной плазмы, для которой  $k_x^* < 1/\varrho_e$ , так что

$$\frac{\varrho_i}{a} < \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/2}, \quad (1.46)$$

и сильно неоднородной, если  $k_x^* > 1/\varrho_e$ , т. е.

$$\frac{\varrho_i}{a} > \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/2}, \quad (1.47)$$

где  $\varrho_e$  — ларморовский радиус электрона. Для слабо неоднородной плазмы характерная дрейфовая частота  $\omega^*$  будет оставаться меньше  $\omega_{Bi}$  вплоть до длин волн порядка ларморовского радиуса электронов. Можно ограничиться изучением только низкочастотных колебаний такой плазмы, не рискуя при этом потерять из виду какие-либо эффекты, существенно связанные с ее характерными диэлектрическими свойствами. В случае сильно неоднородной плазмы (1.47) могут встретиться явления, разыгрывающиеся при частотах порядка ионной циклотронной частоты и длинах волн, меньших ларморовского радиуса ионов.

Особенно простым для исследования является случай низкочастотных колебаний ( $\omega \ll \omega_{Bi}$ ). Связано это с тем, что удастся избавиться от сложных сумм по  $n$  (по гармоникам циклотронной частоты) в выражениях для  $\varepsilon_{\alpha\beta}$ ,  $\chi_\beta$ . Примером таких бесконечных сумм могут служить правые части уравнений (1.31). При  $\omega \ll \omega_{Bi}$  вклад членов с различными индексами суммирования в диэлектрическую проницаемость плазмы оказывается различным: наибольший вклад дают члены с  $n = 0$ , меньший — члены с  $n \neq 0$ . Это связано с тем, что

$$\frac{W_{n \neq 0}}{W_{n=0}} \sim \frac{\omega}{\omega_B} \ll 1.$$

В действительности приходится учитывать также и остальные члены суммы, так как в некоторых элементах  $\varepsilon_{\alpha\beta}$ ,  $\chi_\beta$  отсутствует нулевая гармоника, например в  $\varepsilon_{xx}^0$ ,  $\varepsilon_{xy}^0$ ,  $\varepsilon_{xz}^0$ .

Для упрощения выражений типа (1.31) при  $\omega \ll \omega_{B1}$  сделаем еще одно предположение:

$$k_z v_T \ll \omega_B, \quad (1.48)$$

означающее малость эффектов циклотронного поглощения (см. § 11 в работе [1]). В противном случае колебания оказались бы сильно затухающими. В случае коротких по  $x$ ,  $y$  волн ( $k_\perp \rho_1 \geq 1$ ) из неравенства (1.48) следует, что  $k_z \ll k_\perp$ , т. е. слабо затухающие волны могут распространяться лишь почти поперек магнитного поля. В дальнейшем мы всегда будем полагать  $k_z \ll k_\perp$ , так как при частотах  $\omega \sim k_\perp v_{др}$  и  $k_z \sim k_\perp$  волны оказываются сильно затухающими из-за черенковского поглощения (см. § 11 в работе [1]).

В результате упрощений, т. е. в случае, когда  $\omega$  и  $k_z v_T \ll \omega_B$ , а  $k_z \ll k_\perp$ , выражение для  $\varepsilon_{\alpha\beta}^0$  принимает вид:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{xx}^0 &= \frac{\omega_0^2}{\omega_B^2} \frac{1 - I_0 e^{-z}}{z}; \\ \varepsilon_{yx}^0 &= -\varepsilon_{xy}^0 = -i \frac{\omega_0^2}{\omega \omega_B} e^{-z} (I_0 - I_1); \\ \varepsilon_{yy}^0 &= \varepsilon_{xx}^0 - \frac{\omega_0^2}{\omega k_z v_T} (-i \sqrt{\Gamma} W_0) \cdot 2z (I_0 - I_1) e^{-z}; \\ \varepsilon_{zx}^0 &= \varepsilon_{xz}^0 \approx 0; \\ \varepsilon_{yz}^0 &= -\varepsilon_{zy}^0 = \frac{i \omega_0^2}{\omega \omega_B} \frac{k_x}{k_z} (I_0 - I_1) e^{-z} (1 + i \sqrt{\Gamma} x_0 W_0); \\ \varepsilon_{zz}^0 &= \frac{2 \omega_0^2}{k_z^2 v_T^2} I_0 e^{-z} (1 + i \sqrt{\Gamma} x_0 W_0). \end{aligned} \right\} (1.49)$$

Вследствие отмеченной выше малости некоторых элементов  $\varepsilon_{\alpha\beta}^0$ , связанной, как нетрудно видеть, с замагниченностью поперечного движения частиц при  $\omega \ll \omega_{B1}$ , необходимо учесть вклад в соответствующие элементы  $\varepsilon_{\alpha\beta}$  от слагаемых типа  $\varepsilon_{\alpha\beta}^{II}$  [см. уравнение (1.29)]. Существенными (для ряда случаев) оказываются следующие элементы  $\varepsilon_{\alpha\beta}^{II}$ :  $\varepsilon_{xx}^{II}$ ,  $\varepsilon_{xz}^{II}$ ,  $\varepsilon_{zx}^{II}$ . Например,

$$\varepsilon_{xx}^{II} = -\frac{\omega_0^2}{\omega \omega_B} [1 - e^{-z} (I_0 - I_1)] \cos \psi. \quad (1.50)$$

Видно, что  $\frac{1}{k_\perp} \frac{\partial \varepsilon_{xx}^{II}}{\partial y}$  того же порядка, что и  $\varepsilon_{xx}^0$ .

При тех же предположениях ( $\omega \ll \omega_B$ ;  $k_z v_T \ll \omega_B$ ;  $k_z \ll k_\perp$ ) выражения для  $\chi_\beta^0$  и  $\chi_\beta^{II}$  имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \chi_x^0 &= -\frac{ie^2 n_0}{T k_\perp} (1 - I_0 e^{-z}); \\ \chi_y^0 &= \frac{e^2 n_0}{T k_\perp} \frac{i \sqrt{\pi} W_0}{k_z v_T} z (I_0 - I'_0); \\ \chi_z^0 &= -\frac{ie^2 n_0}{T k_z} (1 + i \sqrt{\pi} \chi_0 W_0) I_0 e^{-z}; \end{aligned} \right\} \quad (1.51)$$

$$\chi_y^{II} = -\frac{e^2 n_0}{T k_\perp} z e^{-z} (I_0 - I'_0). \quad (1.52)$$

Итак, мы получили упрощенные выражения для  $\epsilon_{\alpha\beta}$  и  $\chi_\beta$  которые в дальнейшем будут использованы в задачах о низко частотных колебаниях плазмы.

Если силовые линии постоянного магнитного поля не являются параллельными прямыми, как это предполагалось выше, то полученные в этом параграфе выражения для  $\epsilon_{\alpha\beta}$  и  $\chi_\beta$  должны быть уточнены. Часто, чтобы качественно учесть кривизну силовых линий, поступают следующим образом: силовые линии считают по-прежнему прямыми, но вводят фиктивное гравитационное поле  $g$ , действующее в направлении неоднородности плазмы. Величина  $g$  выбирается так, чтобы скорость гравитационного дрейфа ионов была такой же, как и скорость центробежного дрейфа (из-за кривизны). Для этого должно быть

$$g \simeq \frac{T_i}{m_i R}, \quad (1.53)$$

где  $R$  — радиус кривизны. Диэлектрическая проницаемость плазмы в поле тяжести вычисляется в приложении II.

Другой удобной моделью, учитывающей как кривизну, так и перекрещенность силовых линий, является винтовое магнитное поле цилиндрической симметрии. Этот случай разобран в приложении III. Там же показано, к каким изменениям в  $\epsilon_{\alpha\beta}$  и  $\chi_\beta$  приводит учет неоднородности магнитного поля (т. е. учет магнитного дрейфа частиц).

## § 2. Дрейфовая неустойчивость плазмы

Колебания неоднородной плазмы с фазовыми скоростями  $\omega/k_\perp$ , порядка или меньшими скоростей лармовских дрейфов частиц, интересны тем, что они могут самопроизвольно раскачиваться (в этом случае говорят, что «плазма неустойчива»). Используя полученные выше выражения для  $\epsilon_{\alpha\beta}$ , можно предсказать, когда следует ожидать раскачки колебаний, и убедиться, что раскачка происходит как раз при  $\omega/k_\perp \lesssim v_{др}$ . Проиллюстрируем это на



примере колебаний, продольная фазовая скорость которых  $\omega/k_z$  удовлетворяет соотношению

$$v_{Ti} \ll \frac{\omega}{k_z} \ll v_{Te}. \quad (2.1)$$

Энергия, передаваемая волной частицам плазмы, характеризуется мнимой частью электронного слагаемого  $\epsilon_{zz}$  (мнимая часть ионного слагаемого  $\epsilon_{zz}$  экспоненциально мала, роль остальных  $\epsilon_{\alpha\beta}$  — невелика):

$$\begin{aligned} W_{\text{волн} \rightarrow \text{част}} &\sim \frac{\omega}{4\pi} \text{Im } \epsilon_{zz} = \\ &= \frac{\sqrt{\pi} \epsilon^2 \omega^2}{k_z^3 T_e} \left( 1 + \frac{k_x T_e}{m_e \omega_{Be} \omega} \frac{\partial}{\partial y} \right) \frac{n_0}{v_{Te}} I_0(z_e) e^{-z_e}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

В однородной плазме ( $\partial/\partial y = 0$ ) эта величина всегда положительна, так что волна обязательно затухает. В неоднородной плазме знак энергии может измениться на обратный, если

$$\left( 1 + \frac{k_x T_e}{m_e \omega_{Be} \omega} \frac{\partial}{\partial y} \right) \frac{n_0}{v_{Te}} I_0 e^{-z} < 0. \quad (2.3)$$

Это и есть критерий неустойчивости плазмы относительно возмущений с частотой  $\omega$ . При  $\nabla T_e = 0$  условие неустойчивости имеет крайне простой вид:

$$1 - \frac{k_x v_0^e}{\omega} < 0, \quad (2.4)$$

где  $v_0^e = -\frac{T_e}{m_e \omega_{Be}} \frac{\partial \ln n_0}{\partial y}$  — скорость ларморовского дрейфа электронов. Таким образом, если в неоднородной плазме существуют волны с достаточно малой фазовой скоростью, то они могут быть неустойчивы. В этом параграфе мы покажем, что такие очень медленные волны существуют, если силовые линии удерживающего плазму магнитного поля не слишком сильно отличаются от параллельных друг другу прямых. Вопрос о волнах в кривом магнитном поле рассмотрен в § 5.

Уравнения для медленных волн можно получить следующим способом. Подставим найденные в § 1 для случая  $\omega \ll \omega_{Bi}$  токи и плотность заряда в уравнения Максвелла и Пуассона (1.34) и (1.35). Взяв проекцию уравнения (1.31) на ось  $y$ , можно найти

$$k_x^2 E_y + i k_x \frac{\partial E_x}{\partial y} = \hat{\epsilon}_{y\beta} E_\beta. \quad (2.5)$$

Для интересующего нас случая  $\omega/k_x \lesssim v_{др} \ll v_{Ti}$  правая часть ( $\hat{\epsilon}_{y\beta} E_\beta$ ) значительно меньше отдельных членов левой части. Поэтому приближенно получим

$$E_y = -\frac{i}{k_x} \frac{\partial E_x}{\partial y}, \quad (2.5')$$

так что поперечные компоненты электрического поля потенциальны. Это равенство справедливо с точностью до членов порядка

$$\beta = \frac{8\pi\rho}{B_0^2} \quad \text{и} \quad \left( \frac{k_x v_{др}}{\omega} \right) \beta.$$

С помощью соотношения (2.5) и выражения для  $\varepsilon_{\alpha\beta}$  убеждаемся, что с точностью до  $\beta$

$$\hat{\varepsilon}_{zx}E_x + \hat{\varepsilon}_{zy}E_y \approx 0. \quad (2.6)$$

Используя выражения (2.5) и (2.6) и выбирая в качестве двух других электродинамических уравнений уравнение Пуассона и проекцию (1.34) на ось  $z$ , можно прийти к следующей системе уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \int e^{ik_y y} dk_y \left\{ \frac{1}{k_x} \left( k_{\perp}^2 \varepsilon_{\perp} - ik_y \tilde{\varepsilon}'_{\perp} \right) E_x(k_y) + k_z \varepsilon_{\parallel} E_z(k_y) \right\} &= 0; \\ \int e^{ik_y y} dk_y \left\{ \left( k_{\perp}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{\parallel} \right) E_z(k_y) - \frac{k_z}{k_x} k_{\perp}^2 E_x(k_y) \right\} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

Здесь введены обозначения:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{\perp} &= 1 + \sum_{i, e} \frac{4\pi e^2}{m\omega_B^2} \left( 1 + \frac{k_x}{m\omega_B} \frac{\partial}{\partial y} T \right) n_0 \frac{1 - I_0 e^{-z}}{z}; \\ \tilde{\varepsilon}_{\perp} &= 1 + \sum_{i, e} \frac{4\pi e^2}{m\omega_B^2} \left( 1 + \frac{k_x}{m\omega_B} \frac{\partial}{\partial y} T \right) n_0 e^{-z} (I_0 - I_1); \\ \varepsilon_{\parallel} \equiv \varepsilon_{zz} &= 1 + \sum_{i, e} \frac{4\pi e^2}{k_z^2 T} \left( 1 + \frac{k_x T}{m\omega_B} \frac{\partial}{\partial y} \right) n_0 e^{-z} I_0 (1 + i\sqrt{\pi} x W). \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

В § 3 рассматриваются различные частные случаи колебаний, описываемые системой уравнений (2.7) и (2.8). Здесь же остановимся на исследовании только одного частного случая колебаний, представляющего, по нашему мнению, наибольший интерес и позволяющего проиллюстрировать характерные черты проблемы дрейфовых волн и дрейфовой неустойчивости.

Ограничимся рассмотрением колебаний с  $\lambda_y/a \ll 1$ , достаточно быстро меняющихся по амплитуде в направлении неоднородности плазмы. Вводя волновое число  $K_y(y)$ , слабо меняющееся на расстоянии  $\lambda_y \sim 1/K_y$ , т. е. выбирая поле волны в виде

$$E(y) \sim e^{i \int K_y(y) dy}, \quad (2.9)$$

и пренебрегая членами типа  $dK_y/dy$  и  $(K_y a)^{-1}$ , из уравнений (2.7) и (2.8) получим следующее дисперсионное уравнение:

$$\varepsilon_{\parallel} \left( 1 - \frac{\omega^2}{c^2 k_z^2} \varepsilon_{\perp} \right) + \frac{K_z^2}{k_z^2} \varepsilon_{\perp} = 0, \quad (2.10)$$

где  $K_{\perp}^2(y) = k_x^2 + K_y(y)$ , а  $\varepsilon_{\perp}$  и  $\varepsilon_{\parallel}$  определяются выражениями (2. 8), в которые вместо  $k_y$  должно быть подставлено  $K_y(y)$ .

Уже общий вид дисперсионного уравнения позволяет догадаться, что интересующий нас тип колебаний некоторым образом связан с ионно-звуковыми и альфвеновскими волнами, существующими в однородной плазме. Действительно, если в уравнении (2. 10) пренебречь эффектами неоднородности и считать волны достаточно длинными ( $K_{\perp}^2 \rightarrow 0$ ), то это уравнение распадается на два [1]: одно описывает ионный звук

$$\varepsilon_{\parallel} = 0, \quad (2. 11)$$

другое — альфвеновские волны

$$1 - \frac{\omega^2}{c^2 k_z^2} \varepsilon_{\perp} = 0. \quad (2. 12)$$

При учете дрейфовых членов в выражениях  $\varepsilon_{\parallel}$  и  $\varepsilon_{\perp}$  в том же приближении, т. е. при  $K_{\perp}^2 \rightarrow 0$ , из уравнения (2. 10) также можно получить уравнения, по форме совпадающие с уравнениями (2. 11) и (2. 12), хотя вид входящих сюда  $\varepsilon_{\parallel}$  и  $\varepsilon_{\perp}$  иной. Удобно, по аналогии со случаем однородной плазмы, волны типа (2. 11) называть ионно-звуковыми, а типа (2. 12) — альфвеновскими. Если в уравнении (2. 10) учитывать член с  $K_{\perp}^2$  и не предполагать  $K_{\perp}^2$  малым, то это уравнение не может быть представлено в виде совокупности двух уравнений (если только  $k_z \neq 0$ ). Однако и в этом случае мы будем считать, что имеем дело с ионно-звуковыми и альфвеновскими волнами, хотя и существенно перепутанными между собой.

Ниже мы будем считать плазму достаточно плотной:  $c_A^2 \equiv \equiv B_0^2 4\pi n_0 m_i \ll c^2$  ( $c_A$  — альфвеновская скорость) и достаточно горячей:  $\beta = 8\pi r/B_0^2 \gg m_e/m_i$  (но, конечно,  $\beta \ll 1$ ); длину волны — большей ларморовского радиуса электронов:  $z_e \ll 1$ ; продольную фазовую скорость — лежащей в интервале  $v_{Ti} \ll \ll \omega/k_z \ll v_{Te}$ ; температуру ионов и электронов — не зависящей от координат:  $\nabla T_i = \nabla T_e = 0$ . При этих предположениях из уравнения (2. 10) следует

$$\left. \begin{aligned} & \left[ \left( 1 - \frac{k_x v_0^e}{\omega} \right) \left( 1 + i \sqrt{\pi} \frac{\omega}{k_z v_{Te}} \right) - \frac{k_z^2 T_e}{m_i \omega^2} I_0 e^{-Z} \left( 1 - \frac{k_x v_0^i}{\omega} \right) \right] \times \\ & \times \left( \omega^2 - k_x v_0^i \omega - \frac{Z}{1 - I_0 e^{-Z}} k_z^2 c_A^2 \right) = \\ & = Z \frac{T_e}{T_i} k_z^2 c_A^2 \left( 1 - \frac{k_x v_0^i}{\omega} \right); \\ & Z = \frac{K_{\perp}^2 T_i}{m_i \omega_{Bi}^2}; \quad v_0^i = - \frac{T_i}{T_e} v_0^e. \end{aligned} \right\} (2. 13)$$

Предположим, что возмущение (т. е. некоторый волновой пакет), возникнув в окрестности какой-либо фиксированной точки  $y = y^*$ , прежде чем распространиться на расстояние порядка размера неоднородности плазмы  $a$ , успеет значительно возрасти во времени и стать нелинейным. Такое предположение имело бы смысл, если среди решений уравнения (2. 13) имелись бы такие  $\omega = \omega(\mathbf{K})$ , что

$$\gamma \equiv \text{Im } \omega \gg \frac{1}{a} \frac{\partial \text{Re } \omega}{\partial K_y}. \quad (2. 14)$$

Считая неравенство (2. 14) выполненным, можно рассматривать решения уравнения (2. 13) в окрестности  $y = y^*$ , не заботясь о том, что делалось бы с возмущением вдали от этой точки, в частности не выясняя, является ли найденное решение собственным значением какой-либо граничной задачи. Такие решения мы будем называть локальными. (В § 4 рассмотрены также случаи, соответствующие условию, обратному условию (2. 14), когда локальные решения теряют смысл.)

Будем считать  $T_e = T_i$ . Тогда из уравнения (2. 13) следует

$$\begin{aligned} \left(1 + i\sqrt{\pi} \frac{\omega}{k_x v_{Te}}\right) \left(1 - \frac{k_x v_0^e}{\omega}\right) \left(\omega^2 + k_x v_0^e \omega - \frac{Z k_z^2 c_A^2}{1 - I_0 e^{-Z}}\right) = \\ = Z k_z^2 c_A^2 \left(1 + \frac{k_x v_0^e}{\omega}\right). \end{aligned} \quad (2. 15)$$

При  $Z \ll 1$  три корня  $\omega = \omega(\mathbf{K})$  имеют вид:

$$\begin{aligned} \omega_1 = k_x v_0^e - k_z c_A Z \frac{k_z c_A}{k_x v_0^e} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{k_z c_A}{k_x v_0^e} \right)^2 - 1 \right]^{-1} + \\ + i\sqrt{\pi} k_z c_A \sqrt{\frac{m_e}{m_i \beta}} \frac{Z}{\frac{1}{2} \left( \frac{k_z c_A}{k_x v_0^e} \right)^2 - 1}; \end{aligned} \quad (2. 16)$$

$$\begin{aligned} \omega_2 = -\frac{1}{2} k_x v_0^e + \sqrt{\frac{1}{4} (k_x v_0^e)^2 + c_A^2 k_z^2} + (\text{Члены порядка } Z) - \\ - i\sqrt{\pi} k_z c_A \sqrt{\frac{m_e}{m_i \beta}} \frac{1}{4} \left( \frac{k_z c_A}{k_x v_0^e} \right)^2 \left( 1 + \frac{3}{\sqrt{1 + 4 \left( \frac{c_A k_z}{k_x v_0^e} \right)^2}} \right) \times \\ \times \frac{Z}{\frac{1}{2} \left( \frac{k_z c_A}{k_x v_0^e} \right)^2 - 1}; \end{aligned} \quad (2. 17)$$

$$\begin{aligned} \omega_3 = -\frac{1}{2} k_x v_0^e - \sqrt{\frac{1}{4} (k_x v_0^e)^2 + c_A^2 k_z^2} + (\text{Члены порядка } Z) - \\ - i\sqrt{\pi} k_z c_A \sqrt{\frac{m_e}{m_i \beta}} \frac{2Z \left( \frac{k_z c_A}{k_x v_0^e} \right)^2}{1 + \frac{4c_A^2 k_z^2}{k_x^2 v_0^e} + 3 \sqrt{1 + 4 \left( \frac{c_A k_z}{k_x v_0^e} \right)^2}}. \end{aligned} \quad (2. 18)$$

Видно, что при  $k_z c_A \sim k_x v_0^e$  условие (2. 14) означает

$$\frac{K_y}{K_{\perp}^2 a} \ll \left( \frac{m_e}{m_i \beta} \right)^{1/2}. \quad (2. 19)$$

Таким образом, необходимым условием существования локальных решений, т. е. возмущений, для которых не важны граничные условия, является достаточная малость поперечной длины волны по сравнению с размером неоднородности плазмы.

Из выражений (2. 16)—(2. 18) следует, что волна, связанная с корнем  $\omega_3$ , затухает при всех значениях  $k_z$ , тогда как волны с  $\omega_1$  и  $\omega_2$  могут быть как затухающими, так и раскачивающимися: при  $k_z c_A > \sqrt{2} |k_x v_0^e|$  раскачивается волна с  $\omega = \omega_1$ , а при  $k_z c_A < \sqrt{2} |k_x v_0^e|$  — волна с  $\omega = \omega_2$ . Уравнения (2. 16)—(2. 18) хорошо иллюстрируют общий критерий раскачки, сформулированный в начале настоящего параграфа [см. условие (2. 4)]: раскачиваются те волны, у которых  $\omega/k_x v_0^e < 1$ .

Таким образом, видно, что в плазме существуют очень медленные волны [условие существования (2. 19)], неустойчивые при  $\omega/k_x v_0^e < 1$ . Неустойчивость подобного рода будем называть дрейфовой неустойчивостью (можно показать, что дрейфовая неустойчивость имеет место не только при  $\nabla T = 0$ , но и при любом соотношении  $\nabla T$  и  $\nabla n_0$ ; см. § 3).

Заметим, что если в уравнениях (2. 16)—(2. 18) пренебречь членами порядка  $Z$ , то получающиеся в результате выражения  $\omega = \omega(\mathbf{K})$  есть решения уравнений (2. 11) и (2. 12), причем  $\omega = \omega_1(k)$  соответствует ионному звуку, а  $\omega = \omega_{2,3}(\mathbf{K})$  — альфвеновским волнам. Вещественные части  $\omega_{1,2,3}$ , как функции  $k_z$ , отложены на рис. 1. При достаточно больших  $k_z$  мы, в согласии с уравнением (2. 13), учли член, соответствующий продольному движению ионов ( $\sim k_z^2$ ), и схематически показали, как происходит переход от обычных ионно-звуковых ветвей однородной плазмы к ветви  $\omega = \omega_1(k_z)$ . Видно также, что вторая ионно-звуковая ветвь (нижняя) оказывается сильно замедленной и при достаточно малых  $k_z$  уже не удовлетворяет условию  $\omega/k_z \gg v_{Ti}$  даже в сильно неизотермической плазме ( $T_e \gg T_i$ ).

Если  $k_z c_A \approx \sqrt{2} |k_x v_0^e|$ , то частота быстрой ионно-звуковой волны почти совпадает с частотой медленной альфвеновской волны ( $\omega_1 \approx \omega_2$ ). В этом случае уравнения (2. 16) и (2. 17) теряют силу. Из выражения (2. 15) можно найти, что инкремент  $\gamma$ , как функция  $k_z$ , достигает максимума как раз при  $k_z \approx \sqrt{2} |k_x v_0^e| / c_A$  и имеет вид

$$\gamma = \sqrt{\frac{\pi}{6}} k_x v_0^e \sqrt{\frac{m_e}{m_i \beta}} Z. \quad (2. 20)$$

Видно, что  $\gamma$  растет с ростом  $Z$ . Поэтому наиболее интересная область волновых чисел лежит в интервале  $Z \gtrsim 1$ . Из уравне-

ния (2.15) можно найти, что при  $Z$ , фиксированном и меньшем  $\beta m_i/m_e$ , инкремент максимален при  $k_z = k_z^* \sim \beta^{1/2} \kappa$ , а для больших  $z$  — при  $k_z^* \sim \left(\frac{m_e}{m_i} Z\right)^{1/2} \kappa$  ( $\kappa = \partial \ln n_0 / \partial y$ ). При  $k_z = k_z^*$  и

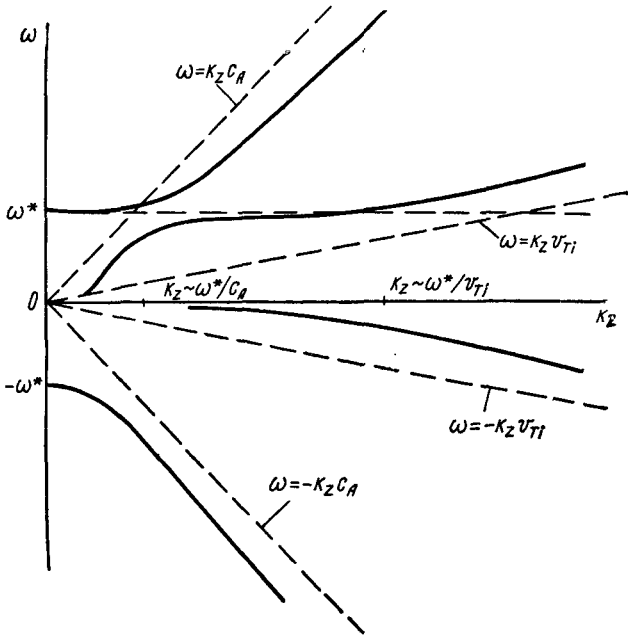


Рис. 1. Зависимость  $\omega = \omega(k_z)$  для альфвеновских и ионно-звуковых колебаний в неоднородной плазме при  $\nabla T = 0$ .

$\omega^* = k_x \frac{cT}{eB_0} \frac{\partial \ln n_0}{\partial y}$  — характерная дрейфовая частота.

уменьшении длины волны (с ростом  $Z$ ) инкремент растет вплоть до  $Z \lesssim \beta \frac{m_i}{m_e}$ , а затем остается постоянным:

$$\gamma_{\text{макс}} = \frac{\kappa v_{Ti}}{4 \sqrt{\pi}}. \quad (2.21)$$

Вещественная часть  $\omega$  при  $k_z \sim k_z^*$  и  $Z > \beta \frac{m_i}{m_e}$  не зависит от  $Z$  и порядка инкремента  $\gamma_{\text{макс}}$ . Зависимости  $k_z^* = k_z^*(Z)$  и  $\gamma_{\text{макс}}(Z)$  изображены на рис. 2 и 3.

Таким образом, мы видим, что в плазме, удерживаемой магнитным полем с прямыми, взаимно параллельными силовыми линиями, должна происходить раскачка дрейфовых волн — дрейфовая неустойчивость. Можно ожидать, что эта неустойчивость будет представлять опасность для экспериментов по удержанию плазмы, так как частицы плазмы, рассеиваясь на сильно развившихся колебаниях, могут покидать объем удержания.

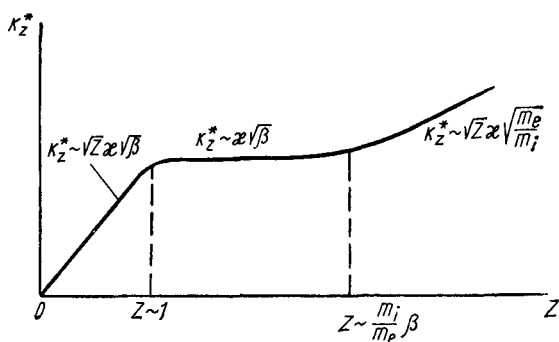


Рис. 2. Зависимость волнового числа  $k_z^*$ , соответствующего максимальному инкременту, от  $Z = K_{\perp}^2 \varrho_i^2$ .

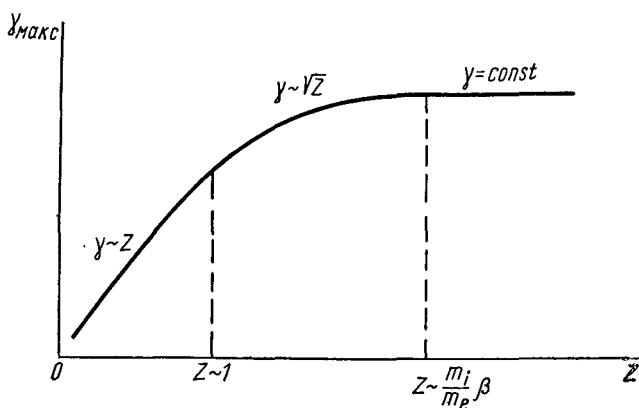


Рис. 3. Зависимость инкремента  $\gamma_{\max}$  от  $Z$ .

### § 3. Обзор работ по дрейфовой неустойчивости

История кинетических неустойчивостей неоднородной плазмы начинается с работы Церковникова [5]. Тип неустойчивости, рассмотренный Церковниковым, все же отличается от разобранный в § 2 — в работе [5] речь шла о неустойчивости, вызываемой магнитным дрейфом. Тем не менее эта работа послужила отправным пунктом для последующих авторов, исследовавших неустойчивости, связанные с ларморовским дрейфом. Обзор работ этих авторов составляет содержание настоящего параграфа.

**Первоначальная группа работ.** Начало изучению кинетических неустойчивостей, связанных с ларморовским дрейфом, было положено работами Рудакова и Сагдеева [6 и 7], выполненными в начале 1961 г. Сейчас, два года спустя, некоторые результаты этих работ можно сформулировать так.

Имелись в виду безвихревые колебания плазмы ( $\text{rot } \mathbf{E} = 0$ ) с длинами волн, значительно превосходящими ларморовский радиус ионов,  $q_i^2 K_{\perp}^2 \rightarrow 0$ , и с  $k_z \neq 0$  (т. е. длинноволновые ионно-звуковые колебания при  $\omega/k_z \ll c_A$ ). Дисперсионное уравнение для таких колебаний имеет вид [это следует, например, из полученного позже уравнения (2. 10)]

$$\varepsilon_{\parallel} |_{z \rightarrow 0} = 0. \quad (3. 1)$$

Авторы рассмотрели интервал частот  $k_z v_{Ti} \ll \omega \ll k_z v_{Te}$ , когда уравнение (3. 1) очень похоже на дисперсионное уравнение для ионно-звуковых колебаний однородной плазмы

$$\left. \begin{aligned} 1 - \frac{k_x v_0^e}{\omega} - \frac{k_z^2 T_e}{m_i \omega^2} \left( 1 - \frac{k_x v_0^i}{\omega} \right) + \frac{i V \bar{\pi} \omega}{k_z v_{Te}} \left[ 1 - \frac{k_x v_0^e}{\omega} \times \right. \\ \left. \times \left( 1 - \frac{\eta_e}{2} \right) \right] = 0; \\ v_0^e = - \frac{T_e}{m_e \omega_{Be}} \frac{\partial \ln n_0}{\partial y}; \\ v_0^i = - \frac{1}{m_i \omega_{Bi}} \frac{1}{n_0} \frac{\partial p_i}{\partial y}; \quad \eta_e = \frac{\partial \ln T_e}{\partial \ln n_0}. \end{aligned} \right\} \quad (3. 2)$$

При  $T_e \simeq T_i$  в этом уравнении не важны члены, соответствующие продольному движению ионов, так что колебания описываются еще более простым уравнением

$$1 - \frac{k_x v_0^e}{\omega} + \frac{i V \bar{\pi} \omega}{k_z v_{Te}} \left[ 1 - \frac{k_x v_0^e}{\omega} \left( 1 - \frac{\eta_e}{2} \right) \right] = 0. \quad (3. 3)$$

Отсюда следует

$$\omega = k_x v_0^e - \frac{i V \bar{\pi}}{2} \frac{(k_x v_0^e)^2}{k_z v_{Te}} \frac{\partial \ln T_e}{\partial \ln n_0}. \quad (3. 4)$$



Видно, что  $\gamma \equiv \text{Im } \omega > 0$ , если

$$\frac{\partial \ln T_e}{\partial \ln n_0} < 0. \quad (3.5)$$

Таким образом, оказывается, что изотермическая плазма неустойчива, если помимо градиента плотности имеется еще и градиент температуры, направленный в противоположную сторону (обращаясь к рис. 1, замечаем, что здесь идет речь о раскачке быстрой (см. стр. 157) ионно-звуковой волны).

В сильно неизоотермической плазме ( $T_e \gg T_i$ ) вещественная часть частоты, как функция волнового числа  $k_z$ , может принимать два значения [см. выражения (3.2)]:

$$\text{Re } \omega_{1,2} = \frac{1}{2} k_x v_0^e \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2} k_x v_0^e\right)^2 + \frac{k_z^2 T_e}{m_i}} \quad (3.6)$$

(т. е. имеются и быстрая и медленная ионно-звуковые волны). Если учесть малые мнимые части в уравнениях (3.2), то окажется, что критерий раскочки волны со знаком плюс (быстрая ветвь) остается прежним [см. соотношение (3.5)]. Вторая волна (медленная, см. рис. 1) оказывается также раскочивающейся, если для нее

$$1 - \frac{k_x v_0^e}{\text{Re } \omega_2} < 0. \quad (3.7)$$

Отсюда при достаточно малом  $k_z$  следует критерий раскочки

$$\frac{\partial \ln T_e}{\partial \ln n_0} > 2. \quad (3.8)$$

Таким образом, из работ Рудакова и Сагдеева следовало, что при некоторых соотношениях между градиентами температуры и плотности в неоднородной плазме, удерживаемой прямым магнитным полем, возможна раскочка ионно-звуковых волн. Эта раскочка обязана взаимодействию резонансных электронов с волной, которое в отличие от обычной ситуации в однородной плазме не обязательно приводит к затуханию волны (см. также сказанное в начале § 2).

В этих же работах было показано, что раскочка колебаний не обязательно связана с мнимыми членами дисперсионного уравнения. Так, при  $\partial \ln T / \partial \ln n_0 \rightarrow \infty$ , даже в случае пренебрежения мнимыми членами в уравнении (3.2), из него следует (если  $k_z^2 T_e / m_i \omega^2 \ll 1$ )

$$\omega^3 = - \frac{k_z^2 T_e}{m_i} k_x v_0^i, \quad (3.9)$$

и один из трех корней соответствует неустойчивости.

Таковы наиболее существенные результаты первой группы работ [6 и 7] по дрейфовой неустойчивости плазмы.

**Усовершенствование теории Рудакова — Сагдеева посредством учета членов типа  $(T_e/T_i)K_{\perp}^2 \varrho_i^2$ .** Результаты Рудакова и Сагдеева были получены с помощью «дрейфового кинетического уравнения» [8], не позволяющего продвинуться в область коротких длин волн  $K_{\perp} \varrho_i \geq 1$  и даже не учитывающего малые члены типа  $K_{\perp}^2 \varrho_i^2$ . В свое время это казалось неважным, так как было распространено мнение, что при длинах волн порядка ларморовского радиуса ионов любые колебания должны быть сильно затухающими и потому не интересны. Поэтому после написания работ [6 и 7] не сразу было уделено внимание исследованию вопроса о том, есть ли дрейфовая неустойчивость при конечных  $K_{\perp}^2 \varrho_i^2$ . Более интересным казался другой вопрос: нет ли какой-либо неустойчивости в неоднородной плазме с нулевым градиентом температуры, так как, согласно Рудакову и Сагдееву, неустойчивой могла быть плазма лишь с  $\partial \ln T / \partial \ln n_0 \neq 0$ . Ответ на этот вопрос был дан А. В. Тимофеевым. Он показал, что в неизотермической плазме ( $T_e \gg T_i$ ) может происходить раскачка колебаний при  $\nabla T = 0$ , если учесть «поперечную инерцию ионов», т. е. если в дисперсионном уравнении для безвихревых колебаний

$$\varepsilon_{\perp} K_{\perp}^2 + \varepsilon_{\parallel} k_z^2 = 0, \quad (3.10)$$

являющемся частным случаем уравнения (2.10), не отбрасывать член с  $\varepsilon_{\perp} K_{\perp}^2$ . Если считать, что частота колебаний лежит в интервале  $k_z v_{Ti} \ll \omega \ll k_z v_{Te}$ , то члены типа  $\varepsilon_{\perp} K_{\perp}^2$  относятся к членам, входящим в выражение  $\varepsilon_{\parallel} k_z^2$ , как  $K_{\perp}^2 \varrho_i^2 (T_e/T_i)$ .

При этом получается дисперсионное уравнение

$$1 + \frac{T_e K_{\perp}^2}{m_i \omega_{Bi}^2} - \frac{k_x v_0^2}{\omega} - \frac{T_e k_z^2}{m_i \omega^2} + i \sqrt{\pi} \frac{\omega}{k_z v_{Te}} \left( 1 - \frac{k_x v_0^2}{\omega} \right) = 0. \quad (3.11)$$

При достаточно малых  $k_z$  отсюда следует

$$\omega = \frac{k_x v_0^2}{1 + \frac{K_{\perp}^2 T_e}{m_i \omega_{Bi}^2}} + i \sqrt{\pi} \frac{(Re\omega)^2}{k_z v_{Te}} \frac{K_{\perp}^2 T_e}{m_i \omega_{Bi}^2}, \quad (3.12)$$

т. е. колебания при  $\nabla T_e = 0$  оказались раскачивающимися.

Таким образом, стало ясно, что учет членов типа  $(T_e/T_i) K_{\perp}^2 \varrho_i^2$  приводит не к стабилизации старых неустойчивостей, а, напротив, к появлению новых. Никаких стабилизирующих эффектов со стороны более коротких волн здесь не обнаружилось и не было видно, как они могут получиться.

**Разработка математического аппарата для исследования колебаний с произвольным  $K_{\perp}^2 \varrho_i^2$ .** Дальнейшему развитию теории дрейфовой неустойчивости в большой степени способствовали успехи другой группы исследователей — Розенблюта, Кролля, Ростокера [9] и их последователей [10, 11], работавших над

проблемами другого типа неустойчивости плазмы — желобковой (теория желобковой неустойчивости плазмы при конечном ларморовском радиусе ионов излагается в § 6). Особенно большую роль сыграла работа Розенблюта и др. [9], в которой был разработан метод решения кинетического уравнения для неоднородной плазмы при произвольном отношении  $q/\lambda_{\perp}$ . Рудаков [10] показал, что, используя гидродинамические уравнения с магнитной вязкостью [2], можно учесть члены типа  $k_x v_0^i/\omega$ , необходимые в теории дрейфовых волн с  $K_{\perp}^2 q_i^2 \ll 1$ . Автором рассмотрен [11] случай колебаний с  $K_{\perp}^2 q_i^2 \geq 1$ , причем было показано, что в некоторых случаях такие колебания раскачиваются (см. более подробно в § 6). Таким образом, прогресс в теории желобковой неустойчивости при конечном ларморовском радиусе ионов привел к более правильному представлению о важности колебаний с  $K_{\perp} q_i \sim 1$  и способствовал разработке математического аппарата для исследования таких колебаний.

В дальнейшем в теории колебаний неоднородной плазмы стали учитываться следующие факторы: длины волн, сравнимые с ларморовским радиусом ионов; произвольное отношение частоты колебаний к циклотронной частоте частиц; произвольное направление волнового вектора; случаи непотенциального электрического поля колебаний.

Существенный шаг в этом направлении был сделан в работе [12], где при перечисленных выше широких предположениях было найдено выражение для токов в плазме, индуцируемых полем волны (изложение результатов этой работы вместе с усовершенствованиями, сделанными автором позже, составляет содержание § 1). Этим была создана более широкая база для исследования различных типов колебаний неоднородной плазмы. Однако физическая суть проблемы оставалась еще неясной.

**Исследование дрейфовой неустойчивости при произвольных  $K_{\perp}^2 q_i^2$ .** Продвижение в область коротких длин волн было сделано тремя группами авторов [13, 14, 15] почти одновременно.

Работа Кадомцева и Тимофеева [13], являющаяся развитием более ранних результатов Тимофеева, посвящена вопросу об устойчивости плазмы с нулевым градиентом температуры ( $\nabla T = 0$ ). Авторы предполагали колебания потенциальными, так что их дисперсионное уравнение по-прежнему можно представить в виде (3. 10), хотя в  $\epsilon_{\perp}$  и  $\epsilon_{\parallel}$  необходимо сохранить все степени  $Z$  [см. уравнение (2. 10)]. В работе [13] показано, что дрейфовая неустойчивость плазмы имеет место при произвольном отношении ларморовского радиуса ионов к длине волны. Ввиду принятого авторами предположения о потенциальности колебаний, их результаты, относящиеся к области  $\omega \geq k_z v_{Te}$ , справедливы только при  $\beta \ll m_e/m_i$  и  $K_{\perp}^2 \gg \omega_{0e}^2/c^2$  (если  $K_{\perp} q_i \lesssim 1$ ). Если эти условия выполнены, то оказывается, что инкремент максимален при  $k_z \simeq \omega/v_{Te}$  и одного порядка с вещественной частью частоты:

$\gamma \simeq \text{Re } \omega \approx k_x v_0^e$  (при  $k_x^2 \varrho_i^2 \lesssim 1$ ). При  $k_x^2 \varrho_i^2 \gg 1$  (авторы полагают  $k_x^2 \gg K_y^2$ ) инкремент, как функция  $k_x$ , стремится к конечному пределу (2. 21). В работе показано, что при  $k_z/\kappa > 0,16$  ( $\kappa \sim 1/a$  — обратный размер неоднородности) колебания не раскачиваются. Это связано с тем, что при столь больших  $k_z$  велико взаимодействие с волной резонансных ионов, поглощающих энергию волны.

Работа Галева и др. [15] преследовала цель выяснить вопрос об устойчивости плазмы с произвольным отношением градиентов температуры и плотности. Исходные предположения этой работы аналогичны предположениям Кадомцева и Тимофеева, за исключением условия  $\nabla T \neq 0$ . Оказывается, что отличие от случая  $\nabla T = 0$  существенно только в области длинноволновых колебаний ( $K_{\perp} \varrho_i \lesssim 1$ ). В области коротких длин волн плазма оказывается неустойчивой при любом соотношении между градиентами температуры и плотности. Имея в виду это свойство рассматриваемой ими неустойчивости, авторы [15] назвали ее «универсальной». В настоящей работе используется термин «дрейфовая неустойчивость», употреблявшийся Кадомцевым и Тимофеевым.

Работа Михайловского и Рудакова [14] является более общей по сравнению с работами [13] и [15] в том отношении, что в ней не предполагается  $\text{rot } \mathbf{E} = 0$ , т. е. рассматриваются непотенциальные колебания. В частности, это позволяет исследовать колебания плазмы с не слишком низким давлением ( $\beta \gtrsim m_e/m_i$ ). Некоторые результаты их исследования составили содержание § 2 настоящей работы. Другие результаты работы [14], как и некоторые результаты работ [13] и [15], мы приведем несколько позже, упомянув предварительно, что к этому же циклу работ примыкает, в частности, более поздняя работа [16], в которой рассматривается вопрос о границах неустойчивости плазмы при произвольном соотношении градиентов температуры и плотности, а также некоторые разделы уже упоминавшейся работы [12], где получены общие уравнения для дрейфовых волн.

Суммарные сведения, которые можно извлечь из последней группы работ, можно сформулировать так.

1. При  $K_{\perp}^2 \varrho_i^2 \gtrsim 1$  и достаточно малых  $k_z$  в плазме существуют возмущения, неустойчивые при любых соотношениях между градиентами температуры и плотности (и, по крайней мере, при  $T_e = T_i$ ). В этом можно убедиться с помощью уравнений (2. 8) и (2. 10), если положить  $1 \ll K_{\perp}^2 \varrho_i^2 \ll m_i/m_e$ ,  $k_z v_{Ti} \ll \omega \ll k_z v_{Te}$ . Тогда

$$\omega = \frac{\frac{k_x}{K_{\perp}} \left( \frac{T_e}{T_i} \right)^{1/2} \sqrt{\frac{T_e}{2\pi m_i}} \kappa \left( 1 - \frac{\eta_i}{2} \right)}{1 + \frac{T_e}{T_i} + \frac{\beta_e}{2} \frac{k_x^2}{K_{\perp}^2} \frac{\kappa^2}{k_z^2} - 2i \sqrt{\pi} \frac{m_e}{m_i} \frac{v_{Te}}{|\omega_{Bi}|} \frac{k_x}{k_z} \kappa \left( 1 - \frac{\eta_e}{2} \right)}; \quad (3.13)$$

$$\beta_e = \frac{8\pi n_0 T_e}{B_0^2}; \quad \kappa = \frac{\partial \ln n_0}{\partial y}; \quad \eta = \frac{\partial \ln T}{\partial \ln n_0}.$$

Знак  $\gamma \equiv \text{Im } \omega$  определяется знаком произведения  $\left(1 - \frac{\eta_i}{2}\right) \times \left(1 - \frac{\eta_e}{2}\right)$ , а последнее при  $T_i = T_e$  всегда положительно.

Если считать, что  $k_z \geq \pi/L$ , где  $L$  — продольная длина установки, то при любом  $\partial \ln T / \partial \ln n_0$  неустойчивость отсутствует,

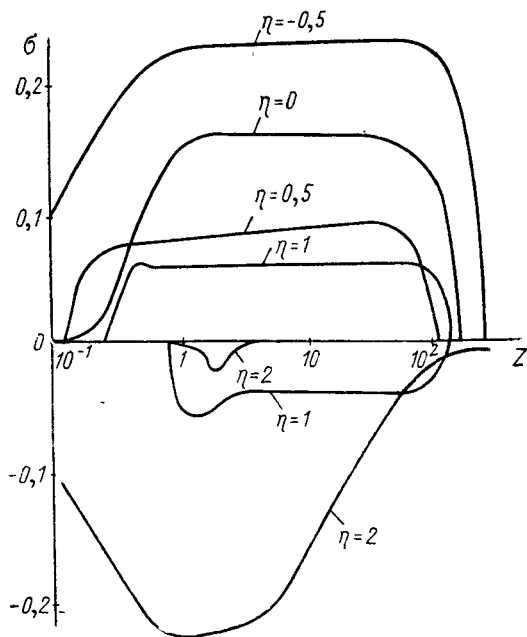


Рис. 4. Границы устойчивости плазмы при различных  $\eta = \frac{\partial \ln T}{\partial \ln n_0}$ . Неустойчивые области лежат между соответствующей кривой  $\sigma(Z)$  и осью абсцисс. По оси ординат отложено  $\sigma = \frac{k_z}{\kappa}$  — отношение «характерного размера» изменения плотности к «продольной длине волны»  $\kappa = \frac{\partial \ln n_0}{\partial y}$ ; по оси абсцисс  $Z = K_{\perp}^2 Q_i^2$ .

если продольный размер  $L$  не слишком велик по сравнению с поперечным размером  $a$ , так что  $a/L \geq 1/10 \div 1/30$  (это относится, по крайней мере, к тем из систем, где силовые линии на концах установок вморожены в проводник). Такой критерий качественно следует из условия малого ионного затухания ( $\omega \gg k_z v_{Ti}$ ). Если вместо  $\omega$  взять  $k_x v_0$ , а  $k_x$  положить  $\sim 1/Q_i$ , то это условие означает  $k_z \ll \kappa$ , т. е.  $L/a \gg 1$  (см. также рис. 4 и 5).

2. Раскачка длинноволновых колебаний определяется различными критериями в зависимости от величины  $\beta_e \equiv 8\pi r_e / B_0^2$ . А именно,

2а. В сильно разреженной плазме ( $\beta \ll m_e/m_i$ ), где альфвеновская скорость превышает тепловую электронную ( $c_A \gg v_{Te}$ ), интересной оказывается не только область частот  $k_z v_{Ti} \ll \omega \ll k_z v_{Te}$ , но также и  $\omega \gg k_z v_{Te}$ . При  $\omega \gg k_z v_{Te}$  и  $K_{\perp}^2 Q_i^2 \ll 1$  дисперсионное уравнение (2. 10) принимает вид [14]:

$$(\omega^2 + \omega\omega^* - k_z^2 c_A^2) (\omega - \omega^*) = - \frac{c^2 K_{\perp}^2}{\omega_{0e}^2} \omega^2 (\omega + \omega^*); \quad (3. 14)$$

$$\omega^* = k_x \bar{v}_0^e (1 + \eta) = - \frac{k_x (\partial p_e / \partial y)}{m_e \omega_{Be} n_0}; \quad T_i = T_e = T.$$

Видно, что градиент температуры всюду входит в сумме с градиентом плотности, поэтому все критерии неустойчивости, полу-

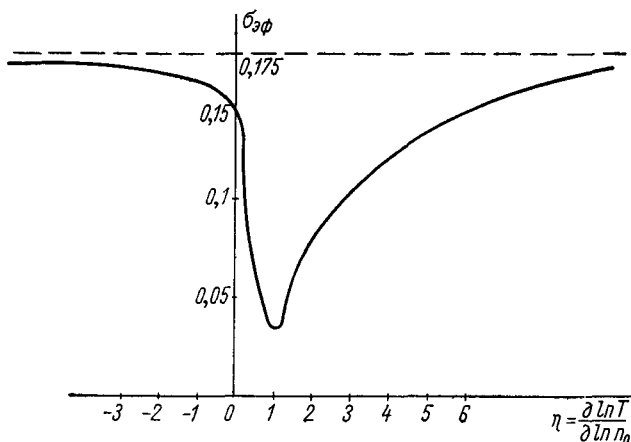


Рис. 5. Отношение «эффективного» поперечного размера неоднородности плазмы к длине самой короткой неустойчивой волны ( $\sigma_{\text{эф}} = |\sigma_{\text{макс}}| / (1 + |\eta|)$ ) как функция  $\eta = \frac{\partial \ln T}{\partial \ln n_0}$ .

чаемые для случая  $\nabla T = 0$ , останутся в силе при любом  $\nabla T$  (кроме  $\partial \ln T / \partial \ln n_0 \approx -1$ , когда  $\omega^* \rightarrow 0$ ).

В случае очень длинных волн ( $k_{\perp}^2 \ll \omega_{0e}^2 / c^2$ ) правая часть уравнения (3. 14) мала, так что для его решения можно воспользоваться методом последовательных приближений. Тогда получаем, что вблизи  $k_z^* = 2\omega^* / c_A^2$  происходит пересечение ветвей колебаний (быстрого ионного звука и медленной альфвеновской волны), аналогичное рассмотренному в § 2 (см. также рис. 1). В окрестности этого  $k_z$  частоты двух ветвей комплексны, инкремент равен

$$\gamma = \pm \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{c K_{\perp}}{\omega_{0e}} \omega^*. \quad (3. 15)$$

При  $\nabla T = 0$  это выражение отличается от инкремента (2. 20), полученного для случая  $\beta \gg m_e/m_i$ , лишь численным множителем порядка единицы (хотя выражение (2. 20) в отличие от инкремента рассматриваемого случая связано с электронным вычетом, т. е. определяется взаимодействием волны с электронами, имеющими скорость вблизи  $\omega/k_z$ ).

Интервал  $\Delta k_z$ , где происходит раскачка колебаний, по порядку величины равен

$$\frac{\Delta k_z}{k_z^*} \approx \frac{cK_{\perp}}{\omega_{0e}}. \quad (3. 16)$$

Если выйти из этого интервала в сторону больших  $k_z$ , то неустойчивость исчезает вплоть до  $k_z \approx k_x v_0^e/v_{Te}$ , после чего члены, определяемые электронным вычетом, становятся существенными, и может начаться область кинетической неустойчивости. Однако, начнется ли кинетическая неустойчивость или колебания будут все же затухающими, это зависит теперь от соотношения между градиентами температуры и плотности, так как последние входят вовсе не аддитивно, как это было при  $\omega/k_z \gg v_{Te}$ . Как можно найти из уравнения (2. 10), при всех  $k_z$  вплоть до  $k_z \approx \omega/v_{Ti}$  граница устойчивости определяется приближенным соотношением

$$\frac{\partial \ln T}{\partial \ln n_0} < 4K_{\perp}^2 \varrho_i^2. \quad (3. 17)$$

Если продвинуться в область еще больших  $k_z$ , т. е.  $k_z \geq \omega/v_{Ti}$ , то можно показать, что здесь и изотермическая плазма ( $T_e \approx T_i$ ) неустойчива при  $\partial \ln T/\partial \ln n > 2$  [16], аналогично тому, как и при  $T_e \gg T_i$  в теории Рудакова—Сагдеева [7].

Такова картина устойчивости сильно разреженной плазмы ( $\beta \ll m_e/m_i$ ) в случае достаточно длинноволновых возмущений ( $K_{\perp}^2 c^2/\omega_{0e}^2 \ll 1$ ).

Возникает вопрос: как изменится эта картина при уменьшении длины волны? Область гидродинамической неустойчивости будет расширяться по  $k_z$  и при  $(\omega_{0e}^2/c^2) K_{\perp}^2 \ll 1/\varrho_i^2$  все три волны — две альфвеновские и быстрая ионно-звуковая — будут сильно перепутаны между собой, а уравнение (3. 14) примет вид [13, 15].

$$\frac{\omega - \omega^*}{\omega + \omega^*} = \frac{m_e}{m_i} \frac{K_{\perp}^2}{k_z^2} \frac{\omega^2}{\omega_{Bi}^2}. \quad (3. 18)$$

Условие неустойчивости теперь таково [13]:

$$k_z v_{Te} < 3,3\omega^* K_{\perp} \varrho_i. \quad (3. 19)$$

Видно, что с ростом  $K_{\perp} \varrho_i$  область гидродинамической неустойчивости начинает перекрываться с областью кинетической неустойчивости, а интервал устойчивых  $\partial \ln T/\partial \ln n_0$  уменьшается [см. уравнение (3. 17)]. При еще более коротких волнах ( $K_{\perp}^2 \varrho_i^2 \gg 1$ ) картина неустойчивости описывается уравнением (3. 13).

26. В более плотной плазме ( $\beta \gg m_e/m_i$ ) область рассмотренной выше дрейфовой гидродинамической неустойчивости отсутствует. При  $\nabla T = 0$ , неустойчивость плазмы с  $\beta \gg m_e/m_i$  была уже рассмотрена в § 2. При  $\nabla T \neq 0$  и при  $k_z \geq \omega/v_{Te}$  ситуация ничем не отличается от случая  $\beta \ll m_e/m_i$ . Если рассматривать только потенциальные колебания, то оказалось бы, что в такой плазме ( $\beta \gg m_e/m_i$ ) нет длинноволновой неустойчивости ( $K_{\perp}^2 \varrho_i^2 \ll 1$ ), если  $0 < \partial \ln T / \partial \ln n_0 < 2$ . В действительности же и в этом случае есть раскачивающиеся колебания — это альфвеновские волны [14]. Убедиться в этом можно следующим образом. Согласно уравнению (2. 10), длинноволновые альфвеновские колебания в плазме с  $\eta = \partial \ln T / \partial \ln n_0 \neq 0$  описываются уравнением

$$\omega^2 + \omega k_x v_0^e (1 + \eta) - c_A^2 k_z^2 = -i \sqrt{\pi} \frac{\omega}{k_z v_{Te}} c_A^2 k_z^2 \varrho_i^2 K_{\perp}^2 \times$$

$$\times \frac{\left[ 1 + \frac{k_x v_0^e}{\omega} (1 + \eta) \right] \left[ 1 - \frac{k_x v_0^e}{\omega} \left( 1 - \frac{\eta}{2} \right) \right]}{\left( 1 - \frac{k_x v_0^e}{\omega} \right)^2}. \quad (3. 20)$$

Считая для определенности  $k_x v_0^e > 0$ , находим, что волна типа (2. 18) затухает при любых  $\eta$ , тогда как у волны типа (2. 17)

$$\text{Sgn } \gamma = \text{Sgn} \left\{ \frac{3}{2} k_x v_0^e - \sqrt{\left[ \frac{k_x v_0^e}{2} (1 + \eta) \right]^2 + c_A^2 k_z^2} \right\}. \quad (3. 21)$$

Отсюда следует, что эта волна раскачивается при  $(-4) < \frac{\partial \ln T}{\partial \ln n_0} < 2$ .

2в. *Случай плазмы промежуточного давления*  $\beta \approx m_e/m_i$  выделен тем, что здесь электронная тепловая скорость примерно совпадает с альфвеновской ( $v_{Te} \approx c_A$ ). Поскольку максимальный инкремент длинноволновых колебаний обычно лежит в области  $k_z \sim \omega/c_A$ , а при таких  $k_z$  аргумент электронной  $W$ -функции порядка единицы, то этот случай неудобен для исследования. Однако при  $\nabla T = 0$  нетрудно и здесь получить простые результаты, позволяющие, кстати, понять связь между уже рассмотренными предельными случаями  $\beta \ll m_e/m_i$  и  $\beta \gg m_e/m_i$ . При  $\nabla T = 0$  и при  $K_{\perp}^2 \varrho_i^2 \ll 1$  из уравнения (2. 10) следует

$$(\omega - k_x v_0^e) (\omega^2 + k_x v_0^e - c_A^2 k_z^2) =$$

$$= \frac{\varrho_i^2 K_{\perp}^2 c_A^2 k_z^2 (\omega + k_x v_0^e)}{1 + i \sqrt{\pi} \frac{\omega}{k_z v_{Te}} W \left( \frac{\omega}{k_z v_{Te}} \right)}. \quad (3. 22)$$



Вклад малой правой части максимален при  $k_z^2 = 2 (k_x v_0^e / c_A)^2$ . При таком  $k_z$  частоты двух из трех ветвей колебаний близки к  $k_x v_0^e$ , а добавки к ним равны

$$\delta\omega_{1,2} = \pm \frac{2}{3} \frac{\varrho_i K_{\perp} k_x v_0^e}{\left\{ 1 + i V \pi \left( \frac{m_e}{m_i \beta} \right)^{1/2} W \left[ \left( \frac{m_e}{m_i \beta} \right)^{1/2} \right] \right\}^{1/2}}; \quad (3.23)$$

$$\beta = 8\pi \cdot 2n_0 T / B_0^2.$$

Отсюда следует, что при  $\beta \sim m_e / m_i$  инкремент примерно равен  $\gamma \sim \varrho_i K_{\perp} k_x v_0^e$ . Из полученной здесь формулы можно также получить инкремент (2.20) для  $\beta \gg m_e / m_i$  и инкремент (3.15) для  $\beta \ll m_e / m_i$ .

Таковы главные результаты, вытекающие из названной выше группы работ, посвященных дрейфовой неустойчивости плазмы при конечном ларморовском радиусе ионов.

*Исследование дрейфовой неустойчивости плазмы при частотах порядка ионной циклотронной частоты.* Параллельно с исследованием дрейфовой неустойчивости низкочастотных колебаний ( $\omega \ll \omega_{Bi}$ ) был рассмотрен вопрос о дрейфовой раскачке колебаний более высоких частот. Этому посвящена работа Михайловского и Тимофеева [17] и частично работа [18].

В работе [17] рассмотрен случай потенциальных колебаний (уравнения для потенциальных колебаний произвольной частоты см. в приложении IV). Авторы показали, что при достаточно сильной неоднородности плазмы и достаточно коротких волнах, когда дрейфовые частоты могут стать порядка циклотронной ионной (см. в § 1 о том, когда это может быть), возможна раскачка колебаний, частоты которых близки к циклотронным обертонам (циклотронная неустойчивость). Результаты работы можно легко понять, обратившись к уравнению (IV.1) приложения IV. Тогда, например, найдем, что при  $k_z = 0$  и при упрощающих предположениях  $\nabla T_i = \nabla T_e = 0$ ,  $T_e = 0$  и  $Z_i \gg 1$  дисперсионное уравнение для потенциальных колебаний имеет вид

$$1 + K_{\perp}^2 \left( d_i^2 + \frac{m_e}{m_i} \varrho_i^2 \right) - \frac{k_x v_0^i}{\omega} = \frac{1}{\sqrt{2\pi Z}} \frac{\omega - k_x v_0^i}{\omega - n\omega_{Bi}}; \quad (3.24)$$

$$v_0^i = - \frac{\kappa T_i}{m_i \omega_{Bi}}; \quad d_i^2 = \frac{T_i}{4\pi e^2 n_0}; \quad \kappa = \frac{\partial \ln n_0}{\partial y}.$$

Здесь возникает уже знакомый нам эффект пересечения ветвей, если только

$$\kappa \varrho_i \geq 2n \left[ \frac{m_e}{m_i} \left( 1 + \frac{\omega_{Be}^2}{\omega_{0e}^2} \right) \right]^{1/2}; \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.25)$$

«Пересекаются» ветвь циклотронных колебаний плазменного типа  $\omega \approx n\omega_{Bi}$  (см., например, работу [19]) и быстрая альфвеновская

волна  $\omega = k_x v_0^i$  [см. уравнение (2. 18)]. Решая квадратное уравнение (3. 24), нетрудно убедиться, что при пересечении ветвей, т. е. при выполнении условия (3. 25), частота колебаний становится комплексной, так что одна из волн раскачивается, а другая затухает. Характерные инкременты  $\gamma \sim \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/4} \omega_{Bi}$ , характерные длины волн — порядка ларморовского радиуса электронов.

Несколько другими соотношениями описываются колебания при  $\omega/k_z \ll v_{Te}$ . В этом случае дисперсионное уравнение имеет вид

$$1 + \frac{4\pi e^2 n_0}{K_{\perp}^2} \left\{ \frac{1}{T_e} + \frac{1}{T_i} + \frac{i\sqrt{\pi}}{T_e k_z v_{Te}} (\omega - k_x v_0^i) I_0(Z_e) e^{-Z_e} - \frac{1}{T_i \sqrt{2\pi} Z_i} \frac{\omega - k_x v_0^i}{\omega - n\omega_{Bi}} \right\} = 0. \quad (3. 26)$$

Отсюда находим, что при  $\text{Re } \omega \approx n\omega_{Bi}$  инкремент равен

$$\gamma \equiv \text{Im } \omega = - \frac{I_0(Z_e) e^{-Z_e}}{\sqrt{2\pi} Z_i k_z v_{Te}} \frac{(n\omega_{Bi} - k_x v_0^i) (n\omega_{Bi} - k_x v_0^e)}{\left(1 + \frac{T_i}{T_e} + K_{\perp}^2 d_i^2\right)^2}, \quad (3. 27)$$

а условие раскачки имеет вид

$$\left(1 - \frac{k_x v_0^e}{\omega}\right) \left(1 - \frac{k_x v_0^i}{\omega}\right) < 0. \quad (3. 28)$$

В работе [18] рассматривалась дрейфовая раскачка обыкновенной волны, распространяющейся поперек магнитного поля ( $k_z = 0$ ). Из рис. 1 видно, что быстрая ионно-звуковая волна при  $k_z \rightarrow 0$  имеет отличную от нуля частоту  $\omega = k_x v_0^e$ . Однако при уменьшении  $k_z$  поляризация этой волны существенно изменяется, так что при  $k_z = 0$  ионно-звуковая волна становится чисто поперечной ( $\text{div } \mathbf{E} = 0$ ) с поляризацией типа обыкновенной волны ( $\mathbf{E} \parallel \mathbf{B}_0$ ) [1].

Уравнения, описывающие этот тип колебаний, приведены в приложении IV. Если  $k_x v_0^e$  сравнивается с ионной циклотронной частотой, то дрейфовая ветвь «пересекается» с циклотронной, существующей и в однородной плазме [20], в результате чего обеим ветвям может соответствовать комплексная частота. Дисперсионное уравнение, описывающее раскачку обыкновенной волны вблизи циклотронных гармоник, имеет вид (см. приложение IV)

$$\frac{1}{\omega} - \zeta \frac{k_x v_0^e}{\omega^2} + \zeta \frac{m_e}{m_i} \frac{I_n e^{-Z_i}}{\omega - n\omega_{Bi}} \left(1 - \frac{k_x v_0^i}{\omega}\right) = 0; \quad \zeta = \left(1 + \frac{c^2 K_{\perp}^2}{\omega_{\phi e}^2}\right)^{-1}. \quad (3. 29)$$

Отсюда следует, что условие раскачки имеет вид

$$Q_e \kappa \geq \frac{m_e}{m_i} \frac{1}{\sqrt{\beta_e}}, \quad (3.30)$$

а максимальный инкремент раскачивающихся колебаний порядка

$$\gamma_{\text{макс}} \approx \left( \frac{m_e}{m_i} \right)^{1/2} \omega_{Bi}.$$

Раскачка подобного рода колебаний может происходить в сильно неоднородных переходных слоях с достаточно горячими электронами.

#### § 4. Прогресс в методике исследования колебаний неоднородной плазмы

Дальнейшие исследования в области дрейфовых волн привели к прогрессу в понимании следующих важных вопросов:

а) *вопроса о методах описания волн в плазме, как в среде с изменяющимися в пространстве параметрами;*

б) *вопроса о влиянии искривленности силовых линий магнитного поля на раскачку колебаний.*

В настоящем параграфе, являющемся продолжением обзора, начатого в § 3, мы разберем цикл работ, относящихся только к первому из этих вопросов, а в § 5 остановимся на работах, посвященных вопросу о роли искривленности силовых линий.

Как мы видели, однородная и неоднородная плазмы [см., например, формулы (1.31) и (2.8)] отличаются тем, что величины  $\epsilon_{\perp}$  и  $\epsilon_{\parallel}$  для неоднородной плазмы содержат дрейфовые члены, которых нет в случае однородной плазмы. Выше мы всюду акцентировали внимание именно на этой характерной черте неоднородной плазмы, приводящей в конечном счете к ряду интересных эффектов, в частности, к дрейфовой неустойчивости.

Однако между характеристиками однородной и неоднородной плазмы имеется еще и то существенное различие, что величины  $\epsilon_{\perp}$  и  $\epsilon_{\parallel}$  для неоднородной плазмы являются функциями координат, тогда как для однородной они от координат не зависят. Это означает, что в неоднородной плазме свойства волны в различных точках пространства будут различными. Математически это соответствует тому, что уравнение (2.7) не имеет решений типа плоских волн. Это обстоятельство ставит перед нами проблему исследования пространственной структуры волны.

Средства, с помощью которых можно разрешить эту проблему, зависят от того, в каком отношении находится характерный размер неоднородности плазмы  $a$  и предполагаемый характерный размер пространственного изменения поля волны в направлении неоднородности  $\lambda_y$ . Можно предполагать, что наиболее просто исследовать систему уравнений удастся в двух предельных случаях: когда  $\lambda_y/a \ll 1$ , т. е. когда «длина волны» мала по сравнению с характерным размером неоднородности плазмы, либо при  $\lambda_y/a \gg 1$ , т. е. если волны очень длинные (или плазма сильно неоднородна).

В первом случае мы сможем исследовать свойства волны, если будем поступать аналогично тому, как и при изучении колебаний однородной плазмы, т. е. характеризовать пространственное изменение поля с помощью волнового числа  $K_y = K_y(y)$ , слабо зависящего от координат:

$$E(y) \approx E_0 \exp \left\{ i \int_{y_0}^y K_y(y) dy \right\}. \quad (4.1)$$

Здесь  $E_0$  и  $y_0$  — некоторые постоянные. Такой подход носит название метода геометрической оптики (или «метода квазиклассического приближения»).

Во втором случае мы придем к задаче о распространении волн в двух однородных средах, разделенных между собой бесконечно тонким поверхностным слоем. Соответствующее приближение будем называть приближением поверхностного слоя.

Можно надеяться, что, выяснив свойства колебаний при  $\lambda_y/a \ll 1$  и  $\lambda_y/a \gg 1$ , мы получим приближенную картину и для колебаний с любой длиной волны.

В § 2 и 3 мы интересовались случаем волн с  $\lambda_y/a \ll 1$ . Поэтому мы использовали «квазиклассическое» представление поля типа (4.1) [см. уравнение (2.9)] и свели проблему к решению дисперсионного уравнения (2.10). Это уравнение мы исследовали в духе работы Церковникова [4], предположив, что имеем дело с некоторым волновым пакетом, локализованным в окрестности какой-либо фиксированной точки, и изучая его поведение (рост амплитуды возмущения во времени) за времена гораздо меньшие, чем время его перемещения на расстояние порядка  $a$  [и считая, что за это время он успеет значительно возрасти, т. е. требуя выполнения условия (2.14)].

По существу здесь было сделано допущение о том, что *имеется возмущение, характеризуемое тем, что его дисперсионное уравнение, записанное около произвольной фиксированной точки  $y = y^*$ , может быть удовлетворено при некотором наперед заданном положительном  $K_y^2$* . Для возмущений, начальная амплитуда которых не бесконечно мала (реально мы всегда имеем дело именно с такими возмущениями) и достаточно быстро растет во времени, это допущение может быть подтверждено или опровергнуто (или уточнено) лишь с помощью теории нелинейных колебаний. Однако можно стать на более формальную точку зрения и предполагать, что начальная амплитуда растущих возмущений бесконечно мала, так что в течение сколь угодно большого промежутка времени амплитуда колебаний будет еще оставаться достаточно малой. При таком подходе мы, оставаясь в рамках линейного приближения, можем проследить за поведением даже быстро растущего возмущения в течение времени, за которое оно может перемещаться на расстояние порядка характерного размера неоднородности плазмы  $a$ . В этом случае формальная схема исследования быстро растущих возмущений, очевидно, не должна отличаться от методов

исследования медленно растущих возмущений (для которых соотношение (2. 14) не выполнено), а также затухающих во времени ( $\gamma < 0$ ) или нейтральных ( $\gamma = 0$ ).

Исходя из этих соображений, попытаемся, оставаясь в рамках линейного приближения, получить информацию о разумности используемого в § 2 и 3 «локального метода», т. е. выясним справедливость сформулированного выше допущения. Кроме того, поскольку мы не будем теперь прибегать к соотношению (2. 14), включая в рассмотрение и те возмущения, у которых инкремент, определяемый с помощью локального метода, оказывается еще меньшим или отрицательным.

Интересующие нас сведения могут быть получены следующим путем. Будем продолжать считать, что в точке  $y = y^*$  уравнение (2. 10) может быть удовлетворено при некотором  $K_y^2 > 0$ . Тогда мы можем найти из него частоту колебаний  $\omega$ . Станем следить за возмущением, перемещающимся из окрестности точки  $y = y^*$  в какой-либо другой участок пространства. При этом дисперсионное уравнение (2. 10), уже позволившее нам установить связь между частотой колебаний  $\omega$  и волновым числом  $K_y = K_y(y^*)$ , даст теперь возможность проследить, каким будет волновое число в других точках пространства  $K_y = K_y(y, \omega)$ , где  $y \neq y^*$ . Проиллюстрируем это обстоятельство на примере длинноволновых колебаний  $K_{\perp}^2 \varrho_i^2 \ll 1$ , когда стоящие в уравнении (2. 10) величины  $\varepsilon_{\parallel}$  и  $\varepsilon_{\perp}$  не зависят от  $K_y^2$ . В этом случае квадрат волнового числа в точке  $y$  равен

$$K_y^2(y) = - \left[ k_x^2 + \frac{k_z^2 \varepsilon_{\parallel}}{\varepsilon_{\perp}} \left( 1 - \frac{\omega^2}{c^2 k_z^2} \varepsilon_{\perp} \right) \right], \quad (4. 2)$$

а частота колебаний, входящая в правую часть равенства, определяется из того условия, что  $K_y^2 = K_y^{*2} \equiv K_y^2(y^*)$  есть заранее фиксированное положительное число. С помощью уравнения (4. 2) и соотношения (4. 1) мы можем определить амплитуду волны в любой точке пространства, если она была известна при  $y = y^*$ .

Однако при этом мы не можем быть уверены, что получающееся в результате выражение для поля  $E(y)$  будет удовлетворять правильным граничным условиям, которые могут, например, означать, что поле  $E$  должно исчезать в области, где плазма отсутствует. Необходимость учета граничных условий приводит к некоторым ограничениям на выбор  $K_y^2(y^*)$  или, что то же самое, на возможные значения частоты колебаний. Здесь уместно упомянуть об аналогичной ситуации в квазиклассической задаче о движении частицы в потенциальной яме, где учет граничных условий приводит к квантованию энергии частицы. Однако в нашей задаче дело осложняется тем, что в правой части уравнения (4. 2) стоят, вообще говоря, комплексные величины, тогда как в аналогичных

квазиклассических уравнениях соответствующее выражение (потенциальная энергия частицы) всегда подразумевается вещественным.

Как показал Силин [21], «правило квантования», т. е. условие, которому должно удовлетворять волновое число (а следовательно, и частота колебаний), в задачах о дрейфовой неустойчивости формально имеет тот же вид, что и в квазиклассическом приближении квантовой теории.

Получение «правил квантования» для задачи о дрейфовой неустойчивости можно проиллюстрировать следующим способом. Разрешив уравнение (2. 10) относительно  $K_y^2(y)$ , мы будем иметь соотношение типа

$$K_y^2(y) = Q(\omega, y), \quad (4. 3)$$

где  $Q$  есть некоторая функция координат и частоты колебания [например, в случае длинноволновых колебаний функция  $Q$  имеет вид правой части уравнения (4. 2)]. Если мнимые члены в  $Q$  значительно меньше вещественных, что справедливо, например, в наиболее интересном случае  $k_z v_{Ti} \ll \omega \ll k_z v_{Te}$ , то в комплексном уравнении (4. 3) можно просто разделить действительную и мнимую части и получить следующие соотношения для вещественной и мнимой частей волнового числа:

$$K_1^2(y) = Q_1(\omega_1, y); \quad (4. 4)$$

$$2K_1(y) K_2(y) = Q_2(\omega_1, y) + \gamma \frac{\partial Q_1}{\partial \omega_1}. \quad (4. 5)$$

Здесь  $K_1 = \text{Re } K_y$ ,  $K_2 = \text{Im } K_y \ll K_1$ ,  $\omega_1 = \text{Re } \omega$ ,  $\gamma = \omega_2 = \text{Im } \omega \ll \omega_1$ ,  $Q_1 = \text{Re } Q(\omega = \omega_1)$ ,  $Q_2 = \text{Im } Q(\omega = \omega_1) \ll Q_1$ .

Если обратиться к уравнению (4. 1), то легко заметить, что  $K_1(y)$  характеризует изменение фазы поля колебаний при перемещении возмущения в пространстве, а  $K_2(y)$  показывает, как при этом меняется амплитуда (речь идет о пространственной части поля волны). Пусть возмущение «пропутешествовало» по всей области локализации, которая простирается от «точки поворота»  $y_1$  до точки  $y_2$ , где  $y_1$  и  $y_2$  удовлетворяют соотношению

$$Q_1(\omega_1, y_1) = Q_1(\omega_1, y_2) = 0. \quad (4. 6)$$

Тогда, отразившись от обеих границ и возвратившись в исходную точку, возмущение должно обладать прежней фазой и прежней амплитудой (так как  $E(y)$  — однозначная функция). Следовательно, изменение фазы должно удовлетворять условию

$$\oint K_1(y) dy = 2\pi n, \quad (4. 7)$$

где  $n$  — натуральное число, значительно превосходящее единицу, а результирующее изменение амплитуды должно быть равно нулю, т. е.

$$\oint K_2(y) dy = 0. \quad (4. 8)$$

Здесь интегрирование производится от  $y_1$  до  $y_2$  и обратно, а  $K_1$  — положительный корень уравнения (4. 4).

Соотношения (4. 7) и (4. 8) представляют собой искомые дополнительные ограничения на возможные значения частоты колебаний и аналогичны правилу квантования Бора. Заметим, что оба эти соотношения можно записать в виде единой формулы, имеющей точно такой же вид, что и правило квантования Бора:

$$\oint K_y(y) dy = 2\pi n. \quad (4. 9)$$

Теперь проанализируем, какие следствия вытекают из соотношений (4. 7) и (4. 8), касающиеся локального метода исследования неустойчивости, использованного в § 2 и 3. Соотношение (4. 7) свидетельствует о том, что при  $y = y^*$  вещественная часть квадрата волнового числа  $K_1^2(y^*)$  в действительности может быть не совершенно произвольным положительным числом, а лишь таким, для которого связанная с ним частота колебаний  $\omega_1$  удовлетворяет соотношению

$$\oint \sqrt{Q_1(\omega_1, y)} dy = 2\pi n. \quad (4. 10)$$

Таким образом, вещественная часть частоты колебаний и  $K_1^2(y^*)$  оказываются квантованными величинами. Однако приближенно можно продолжать считать их спектр непрерывным, так как при больших  $n$  расстояния между соседними «уровнями» невелики. В результате можно заключить, что учет дополнительного условия (4. 7) может привести лишь к несущественному уточнению значения вещественной части частоты колебаний, определяемого «локальным методом». Если бы мы вовсе не интересовались инкрементом колебаний, то вопрос о справедливости сформулированного ранее допущения (см. стр. 172) можно было бы считать полностью исчерпанным.

Однако поскольку эффекты, связанные с мнимыми членами дисперсионного уравнения, представляют для нас существенный интерес (именно они ответственны за возможную раскачку колебаний), то мы должны еще позаботиться, чтобы удовлетворялось и второе из дополнительных соотношений — условие (4. 8). Необходимые следствия, связанные с этим соотношением и касающиеся правомочности локального метода, можно получить следующим образом.

Мы постулировали, что имеем право в окрестности произвольной фиксированной точки  $y = y^*$  записывать дисперсионное уравнение (2. 10), предполагая в нем  $K_y^2$  равным положительному числу. Обращаясь к уравнению (4. 5), можно заметить, что на самом деле это может оправдываться лишь при условии  $K_2(y^*) = 0$ , т. е. если

$$Q_2(\omega_1, y^*) + \gamma \frac{\partial Q(\omega_1, y^*)}{\partial \omega_1} = 0. \quad (4. 11)$$

Это соотношение дает некоторую связь между  $\gamma$  и  $y^*$ , так как частоту колебаний  $\omega_1$  с помощью уравнения (4. 4), записанного в точке  $y = y^*$ , можно выразить через параметры плазмы в этой точке. Но, с другой стороны, уравнение (4. 8) — это еще одна связь между  $\gamma$  и  $y^*$ . Поэтому мы приходим к необходимости следующего уточнения основного постулата локального метода: *точка  $y = y^*$ , около которой  $K_y^2$  вещественно, должна быть некоторым образом фиксирована.*

Среди всех уточнений локального метода, вытекающего из более последовательного рассмотрения; проведенного в настоящем параграфе, последнее является наиболее важным. В связи с этим, разумность применения локального метода должна зависеть от того, *насколько существенна выделенность точки  $y = y^*$  среди других, находящихся на участке локализации возмущения.*

Чтобы выяснить это, разберем, какой же смысл, в таком случае, имеет точка  $y^*$ . Для этого введем понятие «локального инкремента»  $\gamma_0 = \gamma_0(y)$ , т. е. понятие о некоторой функции координат, удовлетворяющей уравнению [ср. с уравнением (4. 11)]

$$Q_2(\omega_1, y) + \gamma_0(y) \frac{\partial Q_1(y, \omega_1)}{\partial \omega_1} = 0. \quad (4. 12)$$

Сравнивая это уравнение с уравнением (4. 5), замечаем, что локальный инкремент может быть представлен еще так:

$$\gamma_0(y) = \gamma - \frac{2K_1 K_2}{\partial Q_1 / \partial \omega_1} \equiv \gamma - \frac{K_2(y)}{\partial K_1 / \partial \omega_1}. \quad (4. 13)$$

Величина  $1/(\partial K_1 / \partial \omega_1) \equiv \partial \omega_1 / \partial K_1$  имеет, очевидно, смысл групповой скорости возмущения  $v_{гр}$ , а  $-K_2$  — характеризует увеличение амплитуды возмущения при перемещении возмущения в пространстве. Поэтому произведение  $-K_2 v_{гр} dy$  равно показателю приращения амплитуды волны за время перемещения пакета на расстояние  $dy$ . Таким образом, функция  $\gamma_0$ , учитывающая нарастание амплитуды волны как во времени, так и в пространстве, как видно, вполне оправдывает свое название локального инкремента.

Используя понятие локального инкремента, можно очень просто понять смысл точки  $y = y^*$ : *в этой точке локальный инкремент ( $\gamma_0$ ) совпадает с истинным ( $\gamma$ ), т. е.*

$$\gamma_0(y^*) = \gamma. \quad (4. 14)$$

Уравнение (4. 8) свидетельствует о том, что имеются участки как пространственного нарастания, так и пространственного затухания волны. Это значит, что где-то внутри интервала  $y_1, y_2$  имеется по крайней мере одна точка, в которой  $K_2 = 0$ , т. е. как раз имеющая смысл  $y^*$ . Таким образом, *существенная для локального метода точка  $y = y^*$  лежит где-то внутри области*



локализации волны. Поскольку в § 2 и 3 все точки, лежащие в области неоднородности плазмы, считались *равноправными*, т. е. при получении критериев неустойчивости мы не имели в виду таких ситуаций, когда в одной из точек критерий неустойчивости выполнен, а в другой — нет, то нет никаких причин сомневаться в правильности результатов § 2 и 3 (см. также работу [22]).

Заметим, что уравнение (4. 8) может быть записано в виде

$$\gamma = \frac{\oint \frac{\gamma_0 dy}{v_{гр}}}{\oint \frac{dy}{v_{гр}}}. \quad (4. 15)$$

Видно, что, усредняя локальный инкремент по пространству с соответствующим весом, мы получаем истинный инкремент  $\gamma$ . В частности, если область локализации возмущения мала по сравнению с размером неоднородности плазмы, то истинный и локальный инкременты совпадают один с другим. Это имеет место для не слишком больших «квантовых чисел»,  $n$ , т. е. для достаточно глубоких уровней. Кроме того, из этой формулы видно, что если бы из-за нелинейных эффектов область локализации могла стать достаточно малой \*, то и тогда  $\gamma = \gamma_0$ . В обоих случаях мы имели бы не только качественное, но и количественное совпадение результатов, получаемых разными методами.

Сформулируем итоги проведенного рассмотрения.

1. Исследование мелкомасштабных колебаний неоднородной плазмы можно проводить двумя, взаимно дополняющими, в известной степени, методами: при больших инкрементах, удовлетворяющих условию  $\gamma \gg a^{-1} \partial \text{Re } \omega / \partial K_y$ , физически оправданным является локальный метод; при малых инкрементах ( $\gamma < a^{-1} \partial \text{Re } \omega / \partial K_y$ ) удобно пользоваться методом «правил квантования».

2. Формальное исследование в линейном приближении быстрорастущих волн (удовлетворяющих условию  $a^{-1} \frac{\partial \text{Re } \omega}{\partial K_y} \ll \gamma \ll \omega$ ) методом «правил квантования» качественно подтверждает критерий неустойчивости, получаемые локальным методом.

Мы рассмотрели методы описания колебаний с длиной волны, значительно меньшей размера неоднородности плазмы ( $\lambda_y/a \ll 1$ ), когда возможно «квазиклассическое» представление (4. 1). В случае сильно неоднородной плазмы ( $\lambda_y/a \gg 1$ ), как мы отмечали в начале параграфа, может быть использован метод поверхностных волн. Проиллюстрируем применение этого метода на следующем примере.

\* Б. Б. Кадомцев, исследовавший нелинейные колебания, сообщил, что вполне возможна такая ситуация, когда благодаря рассеянию волн на волнах происходит «запирание излучения».

Рассмотрим длинноволновые ( $Q_i K_{\perp} \ll 1$ ) безвихревые колебания неизотермической плазмы ( $T_e \gg T_i$ ) с частотами  $k_z v_{Ti} \ll \omega \ll k_z v_{Te}$ . Из уравнений (2.7) и (2.8) можно получить следующее дифференциальное уравнение для потенциала поля  $\Phi$ :

$$(\varepsilon_{\perp} \Phi')' - (\varepsilon_{\perp} k_x^2 + \varepsilon_{\parallel} k_z^2) \Phi = 0. \quad (4.16)$$

Здесь

$$\varepsilon_{\perp} = \frac{4\pi e^2 n_0}{m_i \omega_{Bi}^2}; \quad \varepsilon_{\parallel} = \frac{4\pi e^2}{T_e k_z^2} \left( 1 + \frac{k_x T_e}{m_e \omega_{Be} \omega} \frac{\partial}{\partial y} \right) n_0 \left( 1 + i \sqrt{\pi} \frac{\omega}{k_z v_{Te}} \right).$$

Считая, что потенциал слабо меняется на ширине неоднородного слоя и проинтегрировав по слою, получим

$$n_2 k_2 - n_1 k_1 - \frac{k_x \omega_{Bi}}{\omega} \left( 1 + i \sqrt{\pi} \frac{\omega}{k_z v_{Te}} \right) n_0 \Big|_1^2 = 0, \quad (4.17)$$

где  $k_2$  и  $k_1$  определяют спадание электрического поля в однородных областях 1 и 2, т. е.  $E_2 = E_0 e^{-k_2 y}$ ;  $E_1 = E_0 e^{k_1 y}$  (здесь  $y$  — расстояние от слоя). Там, где плазма однородна, пишем обычные дисперсионные уравнения, откуда получаем выражения для  $k_2$  и  $k_1$ :

$$k_2^2 = \frac{1}{Q_2^2} \left( 1 + i \sqrt{\pi} \frac{\omega}{k_z v_{Te2}} \right); \quad (4.18)$$

$$k_1^2 = \frac{1}{Q_1^2} \left( 1 + i \sqrt{\pi} \frac{\omega}{k_z v_{Te1}} \right);$$

$$Q_{1,2}^2 = T_{1,2}^e / m_i \omega_{Bi}^2.$$

Подставляя полученные  $k_1$  и  $k_2$  в уравнение (4.17), найдем, что частота и инкремент колебаний поверхностной волны имеют вид

$$\text{Re } \omega = -k_x \sqrt{\frac{T_e}{m_i}} \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1 \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}}; \quad (4.19)$$

$$\gamma = \text{Im } \omega = -\frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\omega^2}{k_z v_{Te}} \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} \frac{n_2 + n_1}{n_2 - n_1} \left( 1 - \frac{n_2}{n_1} \frac{T_1}{T_2} \right). \quad (4.20)$$

Видно, что эта волна может раскачиваться, если только

$$\frac{T_2}{T_1} < \frac{n_2}{n_1}. \quad (4.21)$$

Чтобы сравнить этот результат с результатом § 3, предположим, что  $|T_2 - T_1| \ll T_1$ ;  $n_2 - n_1 \ll n_1$ ; тогда неравенство (4.21) можно записать еще так:

$$\frac{\Delta \ln T}{\Delta \ln n_0} < 1, \quad (4.22)$$

т. е. сильно неоднородная плазма неустойчива, если  $\partial \ln T / \partial \ln n_0$  отрицательно (или  $\partial \ln T / \partial \ln n_0$  невелико).

## § 5. Дрейфовая неустойчивость плазмы в поле с переменным шагом

Для медленных волн, рассмотренных в § 2 и 3, весьма характерна сильная чувствительность частоты колебаний  $\omega$  к величине волнового числа  $k_z$ ; малейшее изменение  $k_z$  приводит к существенному изменению свойств волны. Для дрейфовых волн ионно-звукового типа должно быть  $k_z/k_x \leq \rho_i/a$ , а для дрейфовых волн альфвеновского типа  $k_z$  еще меньше, такое, что  $k_z/k_x \lesssim \frac{\rho_i}{a} \sqrt{\beta}$  (при больших  $k_z$  и ионный звук, и альфвеновские волны обладают частотой  $\omega$ , значительно превосходящей характерные дрейфовые частоты  $k_x v_{др}$  и не раскачиваются).

Учитывая это, можно предвидеть, что дрейфовая неустойчивость не должна наблюдаться, например, в не слишком длинной экспериментальной установке, на концах которой силовые линии заморожены в проводник. Действительно, в этом случае  $k_z$  ограничено снизу величиной  $\sim 1/L$  ( $L$  — длина установки), так что при  $k_x \sim 1/\rho_i$  неустойчивость заведомо отсутствует, если  $L$  не слишком велико (см. § 3).

Можно представить себе и другую возможность стабилизации дрейфовой неустойчивости, когда проекция волнового вектора на направление силовых линий зависит от координат и не может быть слишком малой сразу во всех точках пространства, занимаемого плазмой. Такая ситуация может быть, например, в случае винтового цилиндрически-симметричного поля с переменным по радиусу шагом. В этом примере роль проекции  $\mathbf{k}$  на направление  $B_0$  играет величина  $k_{\parallel} = (1/B) \left( B_{\varphi} \frac{m}{r} + B_z k_z \right)$  (см. приложение III). Если в некоторой точке  $k_{\parallel}(r_0) = 0$  при  $r = r_0$ , то в соседних точках, где  $r \neq r_0$ ,

$$k_{\parallel}(r) = (r - r_0) k'_{\parallel}(r_0), \quad (5.1)$$

где  $k'_{\parallel}$  — производная по радиусу. Если ввести понятие проекции волнового вектора на бинормаль к силовой линии  $k_b = \frac{(B_{\varphi} k_z - \frac{m}{r} B_z)}{B_0}$  (эта величина аналогична  $k_x$ ), то, как не трудно убедиться,

$$k'_b = -r_0 \mu' k_b, \quad (5.2)$$

где  $\mu \equiv 2\pi/h = B_{\varphi}/rB_z$  — величина, обратная шагу силовой линии. Таким образом, видно, что при переменном по радиусу шаге силовых линий ( $\mu' \neq 0$ ) величина  $k_{\parallel}$  действительно меняется от точки к точке.

Ясно, что в § 2 и 3 мы имели право считать  $k_{\parallel}$  постоянным лишь при не слишком сильной зависимости шага от  $r$ , когда изменением  $k_{\parallel}$  на участке локализации возмущения можно пренебречь:

$$\delta k_{\parallel} \ll k_{\parallel}, \quad (5.3)$$

где  $k_{\parallel}$  — интересующие нас характерные продольные волновые числа. Как следует из § 2 и 3, максимальное из существенных для дрейфовых волн  $k_{\parallel}$  по порядку величины равно

$$k_{\parallel}^{\text{макс}} \sim \frac{Q_i}{a} k_b, \quad (5.4)$$

иначе волны оказываются сильно затухающими из-за резонансного взаимодействия ионов с полем колебаний. Поэтому необходимое условие раскачки дрейфовых волн имеет вид [учтены соотношения (5.1) — (5.4)]:

$$\theta \ll \varrho/\delta. \quad (5.5)$$

где  $\theta = ar_0\mu'$ ; эта величина имеет смысл угла между силовыми линиями, отстоящими одна от другой по радиусу на расстоянии порядка  $a$  (напомним, что  $a$  — характерный размер неоднородности плотности или температуры);  $\delta$  — характерный размер локализации возмущения.

Условие (5.5) с увеличением  $\theta$  раньше всего нарушается для очень протяженных по радиусу возмущений. Например, если возмущение локализовано на участке, сравнимом с размером неоднородности плазмы  $a$ , то оно окажется сильно затухающим уже при [23]

$$\theta \geq \varrho_i/a. \quad (5.6)$$

В § 2 мы видели, что при  $k_{\perp} \varrho_i \sim 1$  можно говорить о возмущениях, локализованных на участке  $\delta$ , размером, не сильно превышающим величину  $(\partial \text{Re } \omega / \partial k_y) / \gamma$ . Однако и такие возмущения не могут реализоваться, если  $\theta \neq 0$  и

$$\theta \geq \left( \frac{m_e}{m_i} \right)^{1/2}. \quad (5.7)$$

Таким образом, уже небольшая перекрещенность силовых линий существенно влияет на возмущения, типа рассмотренных в § 2, и приводит к стабилизации дрейфовой неустойчивости.

Однако критерии (5.6) и (5.7) еще не могут дать полного ответа на вопрос о том, при каких  $\theta$  вообще отсутствует дрейфовая неустойчивость плазмы. Соотношение (5.5) показывает, что наиболее опасными являются сильно локализованные возмущения, и нужно выяснить, нет ли таких при  $\theta \neq 0$ .

Уравнения для медленных волн в винтовом поле, необходимые для выяснения этого вопроса, можно получить примерно таким же способом, что и систему уравнений (2.7) — (2.8) (см. приложение III). Предполагая, как и в § 2,  $E(r) \sim \exp [i \int K_r(r) dr]$ , мы снова приходим к дисперсионному уравнению, имеющему вид уравнения (2.10), в котором вместо  $k_x$ ,  $k_y$  и  $k_z$  стоят  $k_b$ ,  $K_r$  и  $k_{\parallel}$ . Несмотря на внешнее сходство дисперсионных уравнений для прямого и винтового полей, вид их решений существенно разный, если только  $\theta \neq 0$ . Связано это с тем, что появляется новый пара-

метр, характеризующий неоднородность плазмы: скорость изменения по радиусу продольного волнового числа  $k_{\parallel}$ . Если при  $\theta = 0$  неоднородность плазмы можно связать с  $a \approx (\partial \ln n_0 / \partial r)^{-1}$ , то теперь таких размеров два:  $a$  и  $a^* = (\partial \ln k_{\parallel} / \partial r)^{-1}$ . При  $k_{\parallel} \approx \frac{\varrho}{a} k_b$  [см. соотношение (5. 4)],  $a^* \approx \varrho / \theta$ , так что с увеличением  $\theta$  размер  $a^*$  сравнивается с  $a$  при  $\theta \sim \varrho / a$ , а при еще больших  $\theta$  — с  $a^* < a$ . Радикальных изменений свойств дрейфовых колебаний можно ожидать уже при  $a^* < a$ , что вполне подтверждается ранее написанным соотношением (5. 6). Поэтому ниже мы будем предполагать  $a^* \ll a$  и выясним, существуют ли дрейфовые волны, во всей области локализации которых выполняется это неравенство.

Предполагая выполненным также неравенство (5. 7), мы уже не можем использовать локальные решения и должны исследовать вопрос о том, как ведет себя вдали от точки  $r^*$  возмущение, осциллирующее вблизи этой точки  $r = r^*$  [т. е. такое, что  $\text{Re } K_r(r^*) \gg \text{Im } K_r(r^*)$ ]. Если окажется, что с обеих сторон от  $r^*$ , например, при  $r < r_1$ ,  $r > r_2$  ( $r_1 < r^* < r_2$ ) поле волны пространственно затухает, а всюду между  $r_1$  и  $r_2$  выполнены условия  $\omega / k_{\parallel} \gg v_{Ti}$ ,  $\omega < k_b v_0^e$ , то это будет означать, что дрейфовые волны существуют и неустойчивы.

Вблизи точек  $r_1$ ,  $r_2$ , где  $K_r \approx 0$ , можно полагать  $K_r \varrho_i \ll 1$  и тогда из уравнения (2. 10) следует:

$$K_r^2(r) = \frac{1}{\varrho_i^2} \frac{\varepsilon_{\parallel} \left( 1 - \frac{\omega^2}{c^2 k_{\parallel}^2} \varepsilon_{\perp} \right) + \frac{k_b^2}{k_{\parallel}^2} \varepsilon_{\perp}}{\varepsilon_{\parallel} \frac{\omega^2}{c^2 k_{\parallel}^2} \frac{\partial \varepsilon_{\perp}}{\partial z} - \frac{1}{k_{\parallel}^2 \varrho_i^2} \frac{\partial}{\partial z} (z \varepsilon_{\perp})}, \quad (5. 8)$$

где в правой части все функции  $z$  берутся при  $z = \frac{k_b^2 T}{m_i \omega_{Bi}^2}$

( $z_e \approx 0$ ).

Полагая, как и в § 2,  $\beta \gg m_e / m_i$ ;  $\omega / k_{\parallel} \ll v_{Te}$ ;  $T_e = T_i = T$ ;  $\nabla T = 0$ ;  $z_e \ll 1$ , с помощью уравнения (5. 8) находим:

$$K_r^2 = \frac{1}{\varrho^2} \frac{I_0 e^{-z} \left( 1 + \frac{k_b v_0}{\omega} \right) - 2 + \frac{\omega^2}{c_A^2 k_{\parallel}^2} \left( 1 - \frac{k_b^2 v_0^2}{\omega^2} \right) \frac{1 - I_0 e^{-z}}{z} - \varepsilon_{\parallel}^i \left( 1 - \frac{\omega^2}{c^2 k_{\parallel}^2} \varepsilon_{\perp} \right)}{\left( 1 + \frac{k_b v_0}{\omega} \right) \left\{ (I_0 - I_1) e^{-z} + \frac{\omega^2}{c_A^2 k_{\parallel}^2} \left( 1 - \frac{k_b v_0}{\omega} \right) \times \right.} \quad (5. 9)$$

$$\left. \times \left[ \frac{1}{z^2} (1 - I_0 e^{-z}) - \frac{e^{-z}}{z} (I_0 - I_1) \right] \right\}$$

Здесь  $\varrho \equiv \varrho_i$ ;  $v_0 \equiv v_0^e$ ;  $\varepsilon_{\parallel}^i$  — вклад в  $\varepsilon_{\parallel}$  от ионов. Малые мнимые члены от электронного вычета здесь опущены.

Отсюда следует, что даже при  $\theta > \varrho/a$  действительно существуют две точки,  $r_1$  и  $r_2$ , в которых  $k_r^2 = 0$ , а между ними  $K_r^2 > 0$  (если только  $\sqrt{\beta} < \varrho/a$ ). Особенно наглядным является случай  $z \ll 1$ , когда выражение в правой части сильно упрощается

$$K_r^2 = \frac{1}{\varrho^2} \times$$

$$\times \frac{\left[ \frac{k_b v_0}{\omega} - 1 - \frac{k_{\parallel}^2 v_{Ti}^2}{2\omega^2} \left( 1 + \frac{k_b v_0}{\omega} \right) \right] \left[ 1 - \frac{\omega^2}{c_A^2 K_{\parallel}^2} \left( 1 + \frac{k_b v_0}{\omega} \right) \right]}{\left( 1 + \frac{k_b v_0}{\omega} \right) \left[ 1 + \frac{3}{4} \frac{\omega^2}{c_A^2 k_{\parallel}^2} \frac{k_b v_0}{\omega} \left( \frac{k_b v_0}{\omega} - 1 \right) \right]}. \quad (5.10)$$

Видно, что область локализации возмущения ограничена точками, в одной из которых частота колебаний совпадает с локальной частотой ионного звука, а в другой — с локальной частотой медленной альфвеновской волны [ср. с выражениями (2.16) и (2.17)]. Видно также, что во всей области локализации  $k_b v_0 \geq \omega$ , т. е. при учете электронного вычета мы получили бы раскачку колебаний.

Условие достаточной глубины ямы приводит к следующему условию на величину перекрещенности  $\theta$ :

$$\theta \ll \left( \frac{\varrho}{a} \right)^{2/3}. \quad (5.11)$$

Это и есть критерий существования длинноволновых ( $k_b \varrho_i \ll 1$ ) сильно локализованных возмущений, приводящих к неустойчивости плазмы. Ясно, что качественно этот результат должен оставаться в силе вплоть до  $k_b \varrho_i \simeq 1$ .

Однако при более коротких волнах ( $\varrho_i k_b \gg 1$ ) критерий (5.11) теряет силу: оказывается, что коротковолновые возмущения могут быть стабилизированы при  $\theta < \varrho/a$ .

Таким образом, перекрещенность силовых линий приводит к стабилизации дрейфовой неустойчивости плазмы. Существенных эффектов стабилизации следует ожидать при  $\theta \sim \varrho/a$ , хотя некоторые возмущения стабилизируются уже при меньших значениях  $\theta$ , а другие — при несколько больших.

## § 6. Желобковая неустойчивость плазмы при конечном ларморовском радиусе ионов

Если плазма удерживается магнитным полем с искривленными силовыми линиями, то она может быть неустойчива относительно возмущения желобкового типа. Гидродинамическая теория желобковой неустойчивости изложена в обзоре Б. Б. Кадомцева [24]. Результат гидродинамического исследования можно сформулировать так: устойчивой оказывается плазма в установках, где «эффективный» радиус кривизны силовых линий совпа-

дает по направлению с градиентом давления плазмы (выпуклость силовых линий — внутрь плазмы), и неустойчивой, если направление эффективного радиуса кривизны противоположное.

В последнее время теория желобковой неустойчивости была усовершенствована, главным образом, благодаря исследованиям Розенблюта, Кролля и Ростокера [9], показавших, что желобковой неустойчивости может не быть, если ларморовский радиус ионов не слишком мал по сравнению с размером системы, так что

$$q_i^2/a^2 > a/R, \quad (6.1)$$

где  $R$  — эффективный радиус кривизны.

В настоящем параграфе излагаются некоторые результаты кинетической теории желобковой неустойчивости, развитой в упомянутой работе Розенблюта и др. [9], а также в более поздних работах [10, 11]. Кинетическая теория позволяет довольно просто учесть конечность ларморовского радиуса ионов, хотя приходится привязываться к определенной, по возможности простейшей конфигурации магнитного поля, либо моделировать кривизну силовых линий введением фиктивного поля тяжести, используя известную в гидродинамике аналогию между эффектами желобковой неустойчивости в кривом магнитном поле и в гравитационном поле  $g$ , равном по порядку величины  $T/m_i R$ , где  $T$  — температура плазмы, а  $m_i$  — масса иона.

**Желобковая неустойчивость в поле тяжести.** Будем считать, что плазма находится не только в поле однородного магнитного поля с прямыми силовыми линиями, но также и в поле тяжести, направленном вдоль неоднородности плазмы:  $\mathbf{g} = (0, -g, 0)$ . Чтобы исследовать колебания такой плазмы, необходимо знание ее тензора диэлектрической проницаемости. Поскольку закон движения частиц при наличии  $\mathbf{g}$  отличен от случая  $\mathbf{g} = 0$ , то нельзя непосредственно использовать выражение для  $\varepsilon_{\alpha\beta}$ , вычисленное в § 1. В приложении II показано, как изменится выражение для  $\varepsilon_{\alpha\beta}$  при введении  $\mathbf{g}$ . Используя уравнения Максвелла и Пуассона, а также вычисления, сделанные в приложении II, можно получить систему уравнений, описывающих медленные волны в плазме, находящейся в поле тяжести. Эта система уравнений аналогична уравнениям (2. 6) и (2. 7) и может быть записана так:

$$\left. \begin{aligned} \int e^{ik_y y} dk_y \left\{ \frac{1}{k_x} \left[ k_{\perp}^2 \varepsilon_{\perp}^g - ik_y \tilde{\varepsilon}_g \right] E_x(k_y) + k_z \varepsilon_{\parallel}^g E_z(k_y) \right\} &= 0; \\ \int e^{ik_y y} dk_y \left\{ \left( k_{\perp}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{\parallel}^g \right) E_z(k_y) - \frac{k_z}{k_x} k_{\perp}^2 E_x(k_y) \right\} &= 0; \\ E_y(k_y) &= \frac{k_y}{k_x} E_x(k_y). \end{aligned} \right\} \quad (6.2)$$

Здесь  $\varepsilon_{\perp}^g = \varepsilon_{\perp} + \delta\varepsilon_{\perp}$ , где  $\varepsilon_{\perp}$  имеет тот же вид, что и в уравнении (2. 8), а величины  $\delta\varepsilon_{\perp}$  и  $\tilde{\varepsilon}_g$ ,  $\varepsilon_{\parallel}^g$  равны

$$\begin{aligned} \delta\varepsilon_{\perp} &= - \sum_{i, e} \frac{4\pi e^2}{T k_{\perp}^2} \frac{g k_x}{\omega \omega_B} \left\{ 1 + \left[ 1 + \frac{g k_x}{\omega \omega_B} + \frac{T k_x}{m \omega \omega_B} \frac{\partial}{\partial y} \right] i \sqrt{\pi x} W(x) \right\} \times \\ &\quad \times n_0 I_0 e^{-z}; \\ \tilde{\varepsilon}_g &= 1 + \sum_{i, e} \frac{4\pi e^2}{m \omega_B^2} \left( 1 + \frac{k_x}{m \omega \omega_B} \frac{\partial}{\partial y} T \right) n_0 e^{-z} (I_0 - I_1) \times \\ &\quad \times \left[ 1 + \frac{g k_x}{\omega \omega_B} i \sqrt{\pi x} W(x) \right]; \\ \varepsilon_{\parallel}^g &= 1 + \sum_{i, e} \frac{4\pi e^2}{k_z^2 T} \left( 1 + \frac{g k_x}{\omega \omega_B} \right) \left( 1 + \frac{k_x T}{m \omega \omega_B} \frac{\partial}{\partial y} \right) \times \\ &\quad \times (1 + i \sqrt{\pi x} W(x)) n_0 e^{-z} I_0(z); \\ &\quad x = \left( \omega + \frac{g k_x}{\omega_B} \right) / k_z v_T. \end{aligned} \quad (6. 3)$$

Представляя поле в виде (2. 9) и полагая  $K_y a \gg 1$ , можно получить дисперсионное уравнение, аналогичное уравнению (2. 10):

$$\varepsilon_{\parallel}^g \left( 1 - \frac{\omega^2}{c k_z^2} \varepsilon_{\perp}^g \right) + \frac{K_{\perp}^2}{k_z^2} \varepsilon_{\perp}^g = 0. \quad (6. 4)$$

Заметим, что и при наличии силы тяжести структура дисперсионного уравнения медленных волн оказывается точно такой же, как и при  $g = 0$ , что видно из сравнения уравнений (2. 10) и (6. 4).

Поэтому разграничение медленных волн на альфвеновские и ионно-звуковые, приведенное в § 2, остается в силе.

В работе Розенблюта и др. [9] рассматривается случай потенциальных колебаний, распространяющихся поперек магнитного поля,  $k_z = 0$ . С помощью уравнения (6. 4) нетрудно понять, что речь идет о предельном случае альфвеновских колебаний, описываемых при  $k_z = 0$  уравнением

$$\varepsilon_{\perp}^g = 0. \quad (6. 5)$$

Предполагалось, что плотность плазмы достаточно велика ( $c_A^2 \ll c^2$ ), а ларморовский радиус ионов мал по сравнению с длиной волны ( $K_{\perp}^2 \rho_i^2 \ll 1$ ). Нетрудно видеть, что при этих условиях уравнение (6. 5) принимает вид

$$\begin{aligned} \omega^2 - k_x v_0^i + g x &= 0; \\ \left( v_0^i = - \frac{T_i \kappa}{m_i \omega_{Bi}}; \quad \nabla T_i = 0; \quad \kappa = \partial \ln n_0 / \partial y; \quad k_x \gg k_y \right). \end{aligned} \quad (6. 6)$$



Отсюда следует, что если считать  $k_x v_0^i \ll \omega$ , как это обычно делается в гидродинамике, то существует неустойчивость, называемая желобковой, инкремент которой равен

$$\gamma = \text{Im } \omega = \sqrt{g\kappa}. \quad (6.7)$$

Розенблют, Кролль и Ростокер [9] обратили внимание на то, что в некоторых случаях учет членов типа  $k_x v_0^i / \omega$  весьма необходим и может привести к качественно совершенно другим результатам. Действительно, при учете  $k_x v_0^i$  из уравнения (6.6) следует, что желобковая неустойчивость отсутствует, если

$$(k_x v_0^i)^2 > 4g\kappa. \quad (6.8)$$

Таким образом, в работе [9] было показано, что имеет место стабилизирующий эффект, который был назван «эффектом конечного ларморовского радиуса». Смысл этого названия станет ясным, если  $g$  в неравенстве (6.8) заменить эквивалентным ему выражением  $T/m_i R$ , а вместо  $v_0^i$  подставить определяющее его выражение  $v_0^i = -T_i \kappa / m_i \omega_{Bi}$ . Тогда критерий (6.8) примет вид

$$q_i^2 k_x^2 > 4a/R. \quad (6.9)$$

Отсюда видно, что стабилизирующего эффекта не было бы, если формально считать ларморовский радиус бесконечно малым по сравнению с длиной волны.

Из неравенства (6.9) следует, что самыми опасными являются наиболее длинноволновые возмущения. Если считать экспериментальную установку круглой, то, полагая  $k_x^{\text{мин}} \simeq 1/a$ , можно получить качественный критерий отсутствия в ней желобковой неустойчивости, имеющий вид соотношения (6.1).

Стабилизирующий эффект имеет место и в случае резкой границы между плазмой и вакуумом, когда толщину переходного слоя  $a$  можно считать малой по сравнению с поперечным размером установки (в приближении плоского слоя это означает возможность существования очень малых волновых чисел  $k_x$ , таких, что  $k_x a \ll 1$ ). Крускал и Шварцшильд [25] рассматривали устойчивость резкой границы с помощью обычной гидродинамики и показали, что плазма неустойчива при любой величине  $g$ , направленного в сторону вакуума. Однако, используя наши уравнения (6.2) и (6.3), учитывающие конечность ларморовского радиуса ионов, можно найти, что при резкой границе (но все же такой, что  $q_i/a \ll 1$ ) и при очень малом  $g$  плазма устойчива. Действительно, предполагая что  $k_{\perp} q_i \ll 1$  (при  $k_z = 0$ ,  $c_A^2 \ll c^2$ ), из этих уравнений можно получить следующее дифференциальное уравнение:

$$\left[ n_0 \left( 1 - \frac{k_x v_0^i}{\omega} \right) E_x \right]' - k_x^2 n_0 \left( 1 - \frac{k_x v_0^i}{\omega} + \frac{g\kappa}{\omega^2} \right) E_x = 0. \quad (6.10)$$

Проинтегрируем это уравнение вдоль переходного слоя, считая его достаточно тонким ( $k_x a \ll 1$ ) и пренебрегая на нем изменением  $E_x$ . Учитывая, что вне слоя  $E \sim e^{-k_x |y|}$ , получим

$$\omega^2 + \frac{k_x^2 \Gamma_i n_0}{m_i \omega_{Bi}} \omega + g k_x = 0. \quad (6.11)$$

В гидродинамическом приближении ( $\omega \gg \omega_{Bi} Z_i$ ) отсюда следует результат [25], свидетельствующий о неустойчивости плазмы с инкрементом

$$\gamma = \sqrt{g k_x}. \quad (6.12)$$

Однако при очень малом  $g$ , когда

$$k_x^2 \varrho_i^2 > 2 \sqrt{g k_x}, \quad (6.13)$$

неустойчивости нет. На границе условий применимости ( $k_x \sim 1/a$ ) этот критерий качественно совпадает с критерием устойчивости (6.1), полученным Розенблютом и др. [9] для плавного переходного слоя.

В дальнейшем, после опубликования работы Розенблюта и др. [9], несколькими авторами [10, 26] показано, что стабилизирующий эффект может быть описан и гидродинамическим способом, однако для этого обычные гидродинамические уравнения (используемые, например, в энергетическом методе исследования устойчивости [27]) должны быть дополнены членами с магнитной вязкостью [2].

Рассмотренный выше случай колебаний с  $k_z = 0$  является наиболее опасным. Действительно, не полагая  $k_z = 0$ , мы имели бы, например, вместо уравнения (6.5) уравнение]

$$1 - \frac{\omega^2}{c^2 k_z^2} \varepsilon_{\perp}^g = 0, \quad (6.14)$$

откуда при  $c_A^2 \ll c^2$ ,  $\omega \gg k_z v_{Ti}$  следует

$$\omega^2 - k_x v_0^2 \omega + g k_x - c_A^2 k_z^2 = 0. \quad (6.15)$$

Вместо неравенства (6.8) критерий стабилизации определяется следующим соотношением:

$$(k_x v_0^2)^2 > 4 (g k_x - c_A^2 k_z^2). \quad (6.16)$$

Отсюда видно, что неустойчивость отсутствует при сколь угодно малом ларморовском радиусе ионов, если только

$$k_z > \sqrt{g k_x} / c_A. \quad (6.17)$$

При закрепленных на концах установки силовых линиях, когда  $k_z \geq \pi/L$ , критерий отсутствия желобковой неустойчивости, согласно неравенству (6.17), имеет вид [28]

$$Ra > \frac{\beta}{\pi^2} L^2. \quad (6.18)$$

После открытия эффекта стабилизации желобковой неустойчивости при конечном ларморовском радиусе ионов появились надежды, что последовательный учет конечного ларморовского радиуса снимет другие, ранее предсказывавшиеся неустойчивости. Но эти надежды не оправдались. Более того, как мы видели в § 2—5, при  $\omega \lesssim k_x v_0$ , т. е. как раз в области стабилизирующего эффекта желобковой неустойчивости, начинается неустойчивость другого типа — дрейфовая, не исчезающая даже при длинах волн порядка  $\rho_i$  (напротив, при  $K_{\perp} \rho_i \sim 1$  она как раз сильнее всего проявляется).

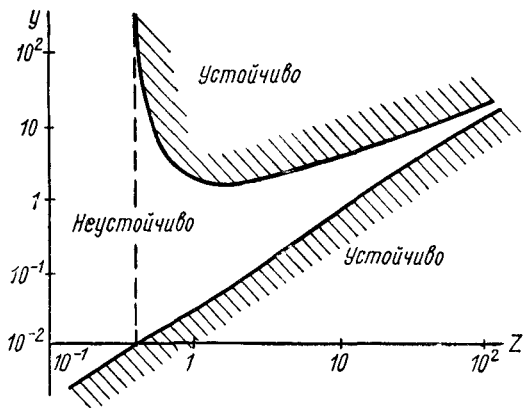


Рис. 6. Желобковая неустойчивость в сильно разреженной плазме при  $g = \frac{1}{12} \frac{\kappa T}{m_i}$

По оси абсцисс отложено  $Z = K_{\perp}^2 \rho_i^2$ , по оси ординат — плотность

$$\left( y = \frac{4\pi n_0 m_i c^2}{B_0^2} \right).$$

Кроме того, оказалось, что даже желобковая неустойчивость не всегда может быть стабилизирована, хотя длина волны возмущений и сравнима с ларморовским радиусом ионов. Речь идет о не слишком плотной плазме  $c_A \gtrsim c$ . Как показано в работе [11], при  $c_A \gtrsim c$  дисперсионное уравнение для желобковой неустойчивости с произвольным  $k_x \rho_i$  имеет вид [оно вытекает из уравнения (6.4)]:

$$1 + \frac{4\pi e^2 n_0}{k_x^2 T_i} (1 - I_0 e^{-z}) \left( 1 - \frac{k_x v_0^i}{\omega} \right) + \frac{4\pi e^2 n_0}{m_i \omega_{Bi}^2} \frac{g \kappa I_0 e^{-z}}{\omega (\omega + g k_x / \omega_B)} = 0, \quad (6.19)$$

$$(z = k_x^2 T_i / m_i \omega_{Bi}^2; \quad K_y \ll k_x; \quad \nabla T = 0).$$

Если с помощью этого уравнения найти границы устойчивости, то мы придем к картине, изображенной на рис. 6. Из рисунка

видно, что в достаточно разреженной плазме неустойчивы даже возмущения с  $K_{\perp} q_i \geq 1$ . Устойчивость плазмы чрезвычайно малой плотности (нижняя часть рисунка) объясняется тем, что движение частицы в такой плазме почти не связано с движением других частиц [29]. Более того, при  $K_{\perp} q_i \gg 1$  появляется своеобразный тип коротковолновой неустойчивости, несколько напоминающий пучковую, так как здесь  $\omega/K \approx -g/\omega_B$ , т. е. фазовая скорость равна скорости гравитационного дрейфа ионов.

**Желобковая неустойчивость в винтовом цилиндрически симметричном магнитном поле [30].** Рассмотрим вопрос о желобковой неустойчивости на более реальном примере (хотя и здесь остается еще ряд идеализируемых положений), считая, что плазма находится в винтовом цилиндрически-симметричном поле. Этот случай конфигурации силовых линий был использован и в § 5, где иллюстрировалось влияние перекрещенности силовых линий на дрейфовую неустойчивость плазмы.

Как следует из уравнения (III. 22), пространственно-плавные возмущения, соответствующие длинноволновым ( $K_{\perp}^2 q_i^2 \ll 1$ ) альфеновским колебаниям, описываются уравнением

$$\left\{ \left[ 1 - \frac{\omega^2}{c_A^2 k_{\parallel}^2} \left( 1 - \frac{k_b v_0^i}{\omega} \right) \right] \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} - k_b^2 \right) + \frac{2k'_{\parallel}}{k_{\parallel}} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{8\pi\rho'}{B_0^2 R} \frac{k_b^2}{k_{\parallel}^2} \right\} E_b = 0. \quad (6.20)$$

Чтобы исследовать это уравнение, перейдем к новым переменным,

$$F = E_b \sqrt{-\lambda} (s^2 + 1)^{1/2}; \quad s^2 = -(r - r_0)^2/\lambda,$$

где

$$\lambda = \omega^2 \left( 1 - \frac{k_b v_0^i}{\omega} \right) / k_{\parallel}^2 c_A^2.$$

Предполагаем, что  $\lambda < 0$ . Тогда уравнение (6. 20) можно записать в виде уравнения Шредингера

$$\frac{d^2 F}{ds^2} + \lambda k_b^2 F + \left[ \frac{\chi^2}{s^2 + 1} - \frac{1}{(s^2 + 1)^2} \right] F = 0 \quad (6.21)$$

для частицы с энергией

$$\varepsilon = \lambda k_b^2 \quad (6.22)$$

и потенциалом

$$U = -\frac{\chi^2}{s^2 + 1} + \frac{1}{(s^2 + 1)^2}. \quad (6.23)$$

Здесь

$$\chi^2 = -\frac{8\pi\rho'}{rB_z^2} \left( \frac{\mu}{\mu'} \right)^2. \quad (6.24)$$

В магнитогидродинамическом приближении ( $\omega \gg k_b v_0^i$ ) частота колебаний, как нетрудно заметить, входит в уравнение (6. 21) квадратично:  $\lambda = \omega^2 / c_A^2 k_{\parallel}^2$ . Поэтому условие устойчивости плазмы в этом приближении совпадает с условием существования решений уравнения (6. 21) с  $\lambda < 0$  (т. е. связанных состояний). Условие существования решения (границу появления первого уровня) можно найти, положив в уравнении (6. 21)  $\lambda \rightarrow 0$ ,  $s \rightarrow \infty$ ; тогда оно принимает вид уравнения Бесселя для функций от мнимого аргумента. Решение, сходящееся на бесконечности, имеет вид:

$$F \sim K_{\nu}(s); \quad \nu = \sqrt{\chi^2 - 1/4}, \quad (6. 25)$$

где  $K_{\nu}$  — функция Макдональда. Поскольку  $\varepsilon \equiv \lambda k_b^2 < 0$ , то эта функция не должна быть осциллирующей на бесконечности, т. е. должно быть

$$\chi^2 > 1/4. \quad (6. 26)$$

Если это соотношение выполнено, то, оставаясь в рамках гидродинамического приближения, следует считать плазму неустойчивой. Этот критерий неустойчивости был впервые получен Сайдемом [31]. Поскольку  $\chi^2$  обратно пропорционально квадрату перекрещенности силовых линий ( $\chi^2 \sim 1/\theta^2$ ), то из неравенства (6. 26) следует, что и здесь перекрещенность силовых линий играет стабилизирующую роль, как это было в случае дрейфовой неустойчивости (см. § 5).

Оказывается, однако, что учет членов порядка  $k_b v_0^i / \omega$  приводит к более благоприятному условию устойчивости. Действительно, при  $k_b v_0^i \neq 0$  из условия существования решения (6. 26) еще не следует неустойчивости, так как в этом случае

$$\omega = \frac{k_b v_0^i}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{k_b v_0^i}{2}\right)^2 + \varepsilon_n \left(\frac{k'_{\parallel} c_A}{k_b}\right)^2} \quad (6. 27)$$

(это соотношение следует из  $\lambda k_b^2 = \varepsilon_n$ , где  $\varepsilon_n$  — собственное значение энергии  $\varepsilon$ ), и колебания устойчивы, если

$$\left(\frac{k_b v_0^i}{2}\right)^2 > |\varepsilon_n| \left(\frac{k'_{\parallel} c_A}{k_b}\right)^2. \quad (6. 28)$$

Поскольку  $|\varepsilon_n|$  во всяком случае не превосходит модуля минимума потенциала  $U$ , то из уравнений (6. 23) и (6. 27) следует, что плазма устойчива даже при больших  $\chi^2$ , если ларморовский радиус ионов достаточно велик, так что

$$\left(\frac{m}{r} \varrho_i\right)^2 > \frac{a}{R} \left(1 + \frac{T_e}{T_i}\right). \quad (6. 29)$$

Здесь  $m$  — азимутальное волновое число (см. приложение III).

Этот критерий устойчивости хорошо согласуется с аналогичным результатом (6. 13) в задаче с силой тяжести.

## § 7. Дрейфовая раскачка желобковых возмущений

Как отмечалось в § 6, при достаточно большом ларморовском радиусе ионов происходит стабилизация желобковой неустойчивости. Однако учет взаимодействия с волной резонансных частиц может приводить к тому, что желобковые возмущения будут все же неустойчивыми, хотя и с меньшими инкрементами. Впервые такие существенно *негидродинамические* эффекты были рассмотрены в той же самой работе Розенблюта и др. [9], где был указан стабилизирующий эффект конечного ларморовского радиуса. Оказалось, что учет взаимодействия волны с резонансными электронами, дрейфующими под действием неоднородности магнитного поля, приводит к раскачке желобковых возмущений. Но этот эффект является экспоненциально малым и вряд ли находится в пределах точности используемых приближений.

В настоящем параграфе будут рассмотрены желобковые возмущения с  $k_{\parallel} \neq 0$ . В этих условиях существенны резонансные механизмы раскачки, связанные с движением частиц вдоль силовых линий и проявляющиеся при  $\omega < k_x v_0$ , где  $v_0$  — скорость ларморовского дрейфа. Если давление плазмы невелико ( $\beta \ll 1$ ), то скорости ларморовских дрейфов значительно превосходят скорость магнитного дрейфа (в  $\beta^{-1}$  раз), так что можно ожидать, что эффекты раскачки косых желобковых возмущений окажутся гораздо сильнее, чем рассмотренные в работе [9].

**Дрейфовая раскачка желобковых возмущений в поле тяжести.** Длинноволновые колебания плазмы (с  $K_{\perp}^2 Q_i^2 \ll 1$ ) в поле тяжести описываются, как это следует из уравнений (6. 2) и (6. 3), следующим дифференциальным уравнением четвертого порядка:

$$\left\{ \left( k_x^2 - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \frac{1}{\varepsilon_{\parallel} k_z^2} \left[ (\varepsilon_{\perp} + \delta\varepsilon_{\perp}) k_x^2 - \frac{\partial}{\partial y} \left( \varepsilon_{\perp} \frac{\partial}{\partial y} \right) \right] + \right. \\ \left. + \left[ 1 - \frac{\omega^2}{c^2 k_z^2} (\varepsilon_{\perp} + \delta\varepsilon_{\perp}) \right] k_x^2 - \right. \\ \left. - \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( 1 - \frac{\omega^2}{c^2 k_z^2} \varepsilon_{\perp} \right) \frac{\partial}{\partial y} \right] \right\} E_x = 0, \quad (7.1)$$

где

$$\varepsilon_{\parallel} = \frac{c^2}{c_A^2} \left( 1 - \frac{k_x v_0^i}{\omega} \right), \quad \delta\varepsilon_{\perp} = \frac{c^2}{c_A^2} \frac{gk_x}{\omega^2}; \\ \varepsilon_{\parallel} = \frac{4\pi e^2 n_0}{k_z^2 T_e} \left( 1 - \frac{k_x v_0^e}{\omega} \right) \left( 1 + i \sqrt{\pi} \frac{\omega}{k_z v_{Te}} W_0 \right). \quad (7.2)$$

Для простоты мы положили  $\nabla T_i = \nabla T_e = 0$ ;  $c^2 \gg c_A^2$ .

Сравнивая по порядку величины члены в уравнении (7. 1), можно заключить, что в этом уравнении при старших производных стоит малый параметр. В случае

$$k_z \geq \omega/v_{Te} \quad (7. 3)$$

таким параметром является величина порядка  $q_i^2$ , а при

$$k_z \leq \omega/v_{Te} \quad (7. 4)$$

— величина  $c^2/\omega_{0e}^2$ .

Считая  $q_i$  и  $c/\omega_{0e}$  малыми по сравнению с другими характерными поперечными размерами (к ним относятся размеры двух типов: характерная длина неоднородности  $a$  и длина волны колебаний в направлении  $x$ , равная  $1/k_x$ ), можно заключить, что два из четырех решений уравнения (7. 1) соответствуют пространственно-плавным возмущениям, «длина волны» которых (вдоль  $y$ ) определяется характерными размерами  $a$  и  $1/k_x$ , а два других соответствуют возмущениям с более короткой «длиной волны», связанной с  $q_i$  или  $c/\omega_{0e}$ . Поэтому из уравнения (7. 1) можно получить два приближенных уравнения, одно для крупномасштабных возмущений

$$\left\{ \left( 1 - \frac{\omega^2}{c^2 k_z^2} \varepsilon_{\perp} \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} - k_x^2 \right) - \frac{\omega^2}{c^2 k_z^2} \varepsilon_{\perp} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\omega^2}{c^2 k_z^2} \delta \varepsilon_{\perp} \cdot k_x^2 \right\} E_x = 0, \quad (7. 5)$$

другое для мелкомасштабных возмущений

$$\varepsilon_{\perp} E_x^{IV} - k_z^2 \varepsilon_{\parallel} \left( 1 - \frac{\omega^2}{c^2 k_z^2} \varepsilon_{\perp} \right) E_x'' = 0. \quad (7. 6)$$

Последнее уравнение эквивалентно уравнению второго порядка для поля  $E_z$

$$\varepsilon_{\perp} E_z'' - k_z^2 \varepsilon_{\parallel} \left( 1 - \frac{\omega^2}{c^2 k_z^2} \varepsilon_{\perp} \right) E_z = 0. \quad (7. 7)$$

Это уравнение является типичным для проблемы о дрейфовой неустойчивости плазмы; оно уже было подробно обсуждено в § 4. В дальнейшем главное внимание будет обращено на исследование другого класса возмущений — желобковых, описываемых приближенным уравнением (7. 5) или более точным уравнением (7. 1).

Пока рассмотрим уравнение (7. 5). О нем также шла речь в § 6. Если предполагать, что длина волны возмущения все же мала по сравнению с размером неоднородности плазмы, то, представляя поле волны в виде  $E_x \sim \exp [i \int K_y(y) dy]$ , можно с его помощью получить дисперсионное уравнение

$$k_x^2 (\omega^2 - \omega k_x v_0^l - c_A^2 k_z^2 + g\kappa) + K_y^2 (\omega^2 - \omega k_x v_0^l - c_A^2 k_z^2) = 0, \quad (7. 8)$$

частным случаем которого является рассматривавшееся в § 6 уравнение (6. 15) (там мы считали  $K_y^2 \ll k_x^2$ ).

Выражая отсюда  $K_y^2(y, \omega)$ ,

$$K_y^2(\omega, y) = -k_x^2 \left( 1 + \frac{g\kappa}{\omega^2 - \omega k_x v_0^i - c_A^2 k_z^2} \right), \quad (7.9)$$

видим, что волна с вещественным на некотором участке пространства волновым числом  $K_y$  может существовать лишь при  $g \neq 0$ . Помимо этого, необходимо, чтобы в области локализации волны, где  $K_y^2 > 0$ , выполнялось условие

$$1 + \frac{g\kappa}{\omega^2 - \omega k_x v_0^i - c_A^2 k_z^2} < 0, \quad (7.10)$$

если считать, что область локализации гораздо больше чем  $1/k_x$ . Границы области локализации определяются точками, в которых либо

$$\omega^2 - \omega k_x v_0^i - c_A^2 k_z^2 + g\kappa = 0, \quad (7.11)$$

и тогда в этой точке  $K_y = 0$ , либо

$$\omega^2 - \omega k_x v_0^i - c_A^2 k_z^2 = 0, \quad (7.12)$$

и тогда  $K_y^2 \rightarrow \pm\infty$ . Ситуация первого типа является обычной в теории колебаний неоднородной плазмы и была обсуждена в § 4. Если же в некоторой точке  $y = y_0$  реализуется соотношение (7.12), то на самом деле наше упрощенное уравнение (7.5) теряет силу, так как нарушается предполагавшееся при его получении условие крупномасштабности колебаний. Будем называть такую точку ( $y = y_0$ ) критической.

Критическая точка имеет следующий смысл: локальная альфвеновская частота в этой точке совпадает с частотой колебаний  $\omega$ . Таким образом, в окрестности  $y = y_0$  нужно решать полное уравнение (7.1), сшивая затем его решения с решением упрощенных уравнений (7.5) и (7.6). В результате оказывается, что решения, удовлетворяющие условиям сшивки, уже не относятся к классу крупно- или мелкомасштабных, а являются смесью обоих классов возмущений.

Будем считать, что критическая точка отсутствует, а область локализации ограничена двумя обычными точками поворота, удовлетворяющими уравнению (7.11).

Существование двух точек  $y_1$  и  $y_2$ , в которых удовлетворяется уравнение (7.11), является типичным для таких случаев распределения плотности, когда  $\kappa \equiv 1/n_0 \frac{\partial n_0}{\partial y}$  имеет максимум, например, при  $\kappa = a/(y^2 + a^2)$ .

Если работать с уравнением (7.7), содержащим лишь нулевые члены по  $K_{\perp}^2 \rho^2$ , то мы получим некоторый спектр вещественных  $\omega$  при условии, что ларморовский радиус ионов достаточно велик и имеет место эффект стабилизации Розенблюта и др. [9]. Этот



вопрос мы рассмотрели в § 6. Однако, если учесть мнимые величины в членах порядка  $K_{1Q_i}^2$ , то вместо уравнения (7. 9) получим

$$K_y^2 = -k_x^2 \left\{ 1 + \frac{g\kappa}{\omega^2 - \omega k_x v_0^i - c_A^2 k_z^2} - \frac{i(g\kappa)^2 (k_x c/\omega)^2}{\omega^2 - \omega k_x v_0^i - c_A^2 k_z^2} \operatorname{Im} \frac{1}{\varepsilon_{\parallel}} \right\}. \quad (7. 13)$$

Тогда частота колебаний станет комплексной, а ее мнимая часть  $\gamma$  будет иметь вид [используется соотношение (4. 8)]

$$\gamma = - \int_{y_1}^{y_2} \frac{1}{K_y} \frac{(g\kappa)^2 \left(\frac{k_x c}{\omega}\right)^2 \operatorname{Im} \frac{1}{\varepsilon_{\parallel}}}{\left(\omega^2 - \omega k_x v_0^i - c_A^2 k_z^2\right)^2} dy \times \left\{ \int_{y_1}^{y_2} \frac{dy}{K_y} \frac{g\kappa (2\omega - k_x v_0^i)}{\left(\omega^2 - \omega k_x v_0^i - c_A^2 k_z^2\right)^2} \right\}^{-1}. \quad (7. 14)$$

В частности, для самых нижних уровней:  $(y_2 - y_1) \ll a$ ;  $\omega \ll k_z v_{Te}$ ;  $T_e = T_i$ ; отсюда следует:

$$\gamma = - \frac{k_z c^2 A}{v_{Te}} k_x^2 Q_i^2 \frac{g\kappa}{\left(\omega_{1,2} + k_x v_0^i\right) \left(2\omega_{1,2} - k_x v_0^i\right)}, \quad (7. 15)$$

где

$$\omega_{1,2} = \frac{k_x v_0^i}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{k_x v_0^i}{2}\right)^2 - g\kappa}.$$

Инкремент медленной волны (знак минус перед корнем) положителен и имеет вид

$$\gamma = \frac{k_z c^2 A}{v_{Te}} k_x^2 Q_i^2 \frac{g\kappa}{\sqrt{\left(\frac{k_x v_0^i}{2}\right)^2 - g\kappa} \left(\sqrt{\left(\frac{k_x v_0^i}{2}\right)^2 - g\kappa} + \frac{k_x v_0^i}{2}\right)}. \quad (7. 16)$$

Таким образом, учет взаимодействия резонансных электронов с волной привел к тому, что желобковые возмущения, даже при наличии стабилизирующего эффекта Розенблюта и др. [9], все же оказываются неустойчивыми, хотя и с меньшим инкрементом.

## П Р И Л О Ж Е Н И Е I

### ТЕНЗОР $\varepsilon_{\alpha\beta}(k, \omega, y)$ ДЛЯ ПЛАЗМЫ С НЕИЗОТРОПНОЙ ФУНКЦИЕЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЦЕНТРОВ ЛАРМОРОВСКИХ КРУЖКОВ

Если  $f_0$  зависит от  $V_z$ , то вместо выражения (1. 9) будем иметь

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\beta}(k, \omega, y) = & \delta_{\alpha\beta} - i \sum_{i, e} \frac{4\pi e^2}{m\omega} \int d\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{v}_\alpha(t) \times \\ & \times \left[ \left( m \frac{\partial F_0}{\partial \varepsilon} - \frac{k_x}{\omega \omega_B} \frac{\partial F_0}{\partial Y} + \frac{k_z}{\omega} \frac{\partial F_0}{\partial V_z} \right) \int_{-\infty}^t v_\beta(t') A(t, t') dt' - \right. \\ & \left. - \frac{i \delta_{\beta x}}{\omega \omega_B} \frac{\partial F_0}{\partial Y} + \frac{i \delta_{\beta z}}{\omega} \frac{\partial F_0}{\partial V_z} \right]. \end{aligned} \quad (1. 1)$$

После интегрирования по  $t'$  и  $\alpha_0$  получаем:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\beta} = & \delta_{\alpha\beta} + \sum_{i, e} \frac{4\pi e^2}{m\omega} \left[ 2\pi \int dv_{\perp 0}^2 dv_{z0} \left\{ \tilde{\Phi} Q_{\alpha\beta} - \frac{1}{\omega_B} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial y} P_{\alpha\beta} \right\} - \right. \\ & - \frac{\delta_{\beta x}}{\omega \omega_B} \left\{ \delta_{\alpha z} \int v_{z0} \frac{\partial f_0}{\partial y} dv_0 - \delta_{\alpha x} \int \frac{v_{\perp 0}^2}{2\omega_B} \frac{\partial^2 f_0}{\partial y^2} dv_0 \right\} + \\ & + \frac{\delta_{\beta z}}{\omega} \left\{ \int v_{z0} \left( \frac{\partial f_0}{\partial v_z} - m v_z \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \right) dv_0 \cdot \delta_{\alpha z} - \delta_{\alpha x} \frac{\partial}{\partial y} \int \frac{v_{\perp}^2}{2\omega_B} \times \right. \\ & \left. \times \left( \frac{\partial f_0}{\partial v_z} - m v_z \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \right) dv_0 \right\} \Big], \end{aligned} \quad (1. 2)$$

где

$$\tilde{\Phi} = m \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \left( 1 - \frac{k_z v_z}{\omega} \right) - \frac{k_x}{\omega \omega_B} \frac{\partial f_0}{\partial y} + \frac{k_z}{\omega} \frac{\partial f_0}{\partial v_z}, \quad (1. 3)$$

а  $Q_{\alpha\beta}$  и  $P_{\alpha\beta}$  определяются по-прежнему уравнениями (1. 23), (1. 24), (1. 21) и (1. 25).

## П Р И Л О Ж Е Н И Е II

### ТЕНЗОР $\varepsilon_{\alpha\beta}$ ( $k, \omega, y$ ) ДЛЯ ПЛАЗМЫ, НАХОДЯЩЕЙСЯ В ПОЛЕ ТЯЖЕСТИ

Закон движения частиц в поле тяжести имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} v_x &= v_{\perp 0} \cos(\alpha_0 - \omega_B t) - \frac{g}{\omega_B}; \\ v_y &= v_{\perp 0} \sin(\alpha_0 - \omega_B t); \\ v_z &= v_{z0}; \\ x &= x_0 - (v_{\perp 0}/\omega_B) [\sin(\alpha_0 - \omega_B t) - \sin \alpha_0] - \frac{gt}{\omega_B}; \\ y &= y_0 + (v_{\perp 0}/\omega_B) [\cos(\alpha_0 - \omega_B t) - \cos \alpha_0]; \\ z &= z_0 + v_{z0}t; \end{aligned} \right\} \quad (II. 1)$$

где

$$v_{\perp 0} = \left[ \left( v_{x0} + \frac{g}{\omega_B} \right)^2 + v_{y0}^2 \right]^{1/2}; \quad \alpha_0 = \arctg [v_{y0}/(v_{x0} + g/\omega_B)];$$

$$v_{x0} = v_x(0); \quad v_{y0} = v_y(0); \quad v_{z0} = v_z(0); \quad g = (0, -g, 0).$$

Константы движения:  $\varepsilon = mv^2/2 + mgy$ ;  $Y = y - v_x/\omega_B$ ;  $V_z = v_z$ . Если  $f_0$  изотропна, то и при наличии  $g$  формула (1. 9) сохраняет силу. Справедливы соотношения

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F_0}{\partial Y} &= \frac{\partial f_0(\varepsilon_0 y)}{\partial y} - mg \frac{\partial f_0(\varepsilon_0, y)}{\partial \varepsilon_0} - \frac{v_x(t)}{\omega_B} \frac{\partial^2 f_0(\varepsilon_0, y)}{\partial y^2}; \\ \frac{\partial F_0}{\partial \varepsilon_0} &= \frac{\partial f_0(\varepsilon_0, y)}{\partial \varepsilon_0} - mg \frac{v_x(t)}{\omega_B} \frac{\partial^2 f_0}{\partial \varepsilon_0^2} - \frac{v_x(t)}{\omega_B} \frac{\partial^2 f_0(\varepsilon_0, y)}{\partial \varepsilon_0 \partial y}, \end{aligned} \right\} \quad (II. 2)$$

где

$$\varepsilon_0 = mv_0^2/2 + mgy; \quad (g/\omega_B \ll \bar{v}_\perp).$$

Окончательное выражение для  $\varepsilon_{\alpha\beta}$ :

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + \sum_{i, e} \frac{4\pi e^2}{m\omega} \left\{ 2\pi \int dv_\perp^2 dv_{z0} \left[ \Phi_1 \left( Q_{\alpha\beta} - \frac{g}{\omega_B} G_{\alpha\beta} \right) - \frac{1}{\omega_B} \left( \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} + m^2 g \frac{\partial^2 f_0}{\partial \varepsilon_0^2} \right) \left( P_{\alpha\beta} - \frac{g}{\omega_B} H_{\alpha\beta} \right) \right] + \frac{\delta_{\alpha x} \delta_{\beta x}}{\omega \omega_B} \int \frac{v_\perp^2}{2\omega_B} \frac{\partial f_0}{\partial y} dv_0 \right\}, \quad (II. 3)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1 &= m \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon_0} \left( 1 + \frac{gk_x}{\omega \omega_B} \right) - \frac{k_x}{\omega \omega_B} \frac{\partial f_0}{\partial y}; \\ \Phi_2 &= m \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon_0} - \frac{k_x}{\omega \omega_B} \frac{\partial f_0}{\partial y}; \\ G_{\alpha\beta} &= \sum_n \zeta_n J_n (\delta_{\alpha x} q_\beta + \delta_{\beta x} q_\alpha^*); \\ H_{\alpha\beta} &= \sum_n \zeta_n [J_n \delta_{x\beta} p_\alpha + q_\alpha^* q_\beta + q_x^* q_\beta \delta_{\alpha x}]. \end{aligned} \right\} \quad (II. 4)$$

Вектор поляризуемости  $\chi_\beta(y, k, \omega)$  равен

$$\chi_\beta = \sum_{i, e} \left( \frac{-ie^2}{m} \right) \left\{ 2\pi \int dv_\perp^2 dv_{z0} \left[ \Phi_1 S_\beta - \frac{1}{\omega_B} \left( \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} + m^2 g \frac{\partial^2 f_0}{\partial \varepsilon_0^2} \right) T_\beta \right] + \frac{\delta_{\beta x}}{\omega \omega_B} mg \int \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} dv_0 \right\}, \quad (II. 5)$$

где

$$\begin{aligned} S_\beta &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \zeta_n J_n \left( q_\beta - \delta_{\beta x} \frac{g}{\omega_B} J_n \right); \\ T_\beta &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \zeta_n \left( q_\beta - \delta_{\beta x} \frac{g}{\omega_B} J_n \right) \left( q_x^* - \frac{g}{\omega_B} J_n \right). \end{aligned} \quad (II. 6)$$

## П Р И Л О Ж Е Н И Е III

### ДИЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ПРОНИЦАЕМОСТЬ ПЛАЗМЫ В ВИНТОВОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ [32]

Будем считать, что плазма занимает бесконечно длинный цилиндр, находящийся в магнитном поле с компонентами  $B_\varphi = B_\varphi(r)$ ,  $B_z = B_z(r)$  и  $B_r = 0$ . Вместо декартовой системы координат, которая использовалась до сих пор, будем работать в цилиндрической системе координат  $r$ ,  $\varphi$  и  $z$ . Вместо волновых чисел  $k_x$ ,  $k_y$  и  $k_z$  введем  $m$ ,  $k_r$  и  $k_z$ . Поле волны будет зависеть от координат так:

$$E = \sum_m \int dk_r dk_z E(m, k_z, k_r) e^{im\varphi + ik_z z + ik_r r}. \quad (III. 1)$$

Удобно сконструировать из цилиндрических волновых чисел  $m$ ,  $k_r$  и  $k_z$  такие комбинации, которые имели бы смысл проекций волнового вектора на направления, связанные с силовой линией, — вдоль силовой линии, на нормаль к ней (т. е. по радиусу) и по бинормали. Такими комбинациями, аналогичными проекциям  $k_x$ ,  $k_y$  и  $k_z$  для плоского слоя, будут величины  $k_b$ ,  $k_r$  и  $k_\tau$ , где  $k_r$  уже было определено выше, а  $k_b$  и  $k_\tau$  имеют вид

$$\begin{aligned} k_b &= \frac{B_\Phi}{B} k_z - \frac{B_z}{B} \frac{m}{r}; \\ k_\tau &\equiv k_{\parallel} = \frac{B_z}{B} k_z + \frac{B_\Phi}{B} \frac{m}{r}. \end{aligned} \quad (\text{III. 2})$$

Подобным же образом вместо цилиндрических компонент поля  $E_r$ ,  $E_\Phi$  и  $E_z$  вводим  $E_b$ ,  $E_r$  и  $E_\tau$ , где

$$\begin{aligned} E_b &= \frac{B_\Phi}{B} E_z - \frac{B_z}{B} E_\Phi; \\ E_\tau &\equiv E_{\parallel} = \frac{B_z}{B} E_z + \frac{B_\Phi}{B} E_\Phi, \end{aligned} \quad (\text{III. 3})$$

а вместо проекций тока  $j_r$ ,  $j_\Phi$  и  $j_z$  будем использовать  $j_b$ ,  $j_r$  и  $j_\tau$ , где

$$\left. \begin{aligned} j_b &= \frac{B_\Phi}{B} j_z - \frac{B_z}{B} j_\Phi; \\ j_\tau &\equiv j_{\parallel} = \frac{B_z}{B} j_z + \frac{B_\Phi}{B} j_\Phi. \end{aligned} \right\} \quad (\text{III. 4})$$

Тогда, как нетрудно убедиться, связь между  $j$  и  $E$  может быть выражена формулами, аналогичными формулам (1. 1) и (1. 2):

$$j_\alpha(r, t) = \sum_m \int d\omega dk_r dk_z \left\{ \frac{\omega}{4\pi i t} (\varepsilon_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta}) e^{i(kr - \omega t)} E_\beta(k, \omega) \right\}; \quad (\text{III. 5})$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\beta}(k, \omega, r) &= \delta_{\alpha\beta} - i \sum_{i, e} \frac{4\pi e^2}{M\omega} \int dv_0 v_\alpha(t) \int_{-\infty}^t \frac{\partial F_0}{\partial v_\gamma(t')} \times \\ &\times \left\{ \left( 1 - \frac{\mathbf{k}v(t')}{\omega} \right) \delta_{\gamma\beta} + \frac{k_\gamma v_\beta(t')}{\omega} \right\} e^{i[\omega(t-t') - \int_{t'}^t \mathbf{k}v(t'') dt'']} dt'. \end{aligned} \quad (\text{III. 6})$$

Здесь индексы  $\alpha$  и  $\beta$  пробегают значения  $b$ ,  $r$  и  $\tau$ .

Для полного вычисления диэлектрической проницаемости нам остается проинтегрировать уравнения движения частиц и произвести усреднение в уравнении (III. 6) по некоторой равновесной функции распределения  $F_0$ .

Предварительно выражаем  $\partial F_0 / \partial v_\gamma$  через интегралы движения. В качестве последних в винтовом магнитном поле могут быть взяты величины

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon &= \frac{Mv^2}{2}; \\ P_z &= v_z - \int_{r_0}^r \frac{eB_\Phi}{Mc} dr; \\ P_\Phi &= rv_\Phi + \int_{r_0}^r \frac{eB_z}{Mc} r dr. \end{aligned} \right\} \quad (\text{III. 7})$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_0}{\partial v_{\mathbf{v}}} = M v_{\mathbf{v}} \frac{\partial F_0}{\partial \varepsilon} + \delta_{b\mathbf{v}} \left( -r \frac{B_z}{B} \frac{\partial F_0}{\partial P_{\Phi}} + \frac{B_{\Phi}}{B} \frac{\partial F_0}{\partial P_z} \right) + \\ + \delta_{\tau\mathbf{v}} \left( r \frac{B_{\Phi}}{B} \frac{\partial F_0}{\partial P_{\Phi}} + \frac{B_z}{B} \frac{\partial F_0}{\partial P_z} \right). \end{aligned} \quad (\text{III. 8})$$

Здесь было использовано следующее соотношение между ортами  $\mathbf{b}$ ,  $\boldsymbol{\tau}$  и  $\mathbf{e}_z$ ,  $\mathbf{e}_{\Phi}$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} &= \frac{B_z}{B} \mathbf{e}_z + \frac{B_{\Phi}}{B} \mathbf{e}_{\Phi}; \\ \mathbf{b} &= \frac{B_{\Phi}}{B} \mathbf{e}_z - \frac{B_z}{B} \mathbf{e}_{\Phi}. \end{aligned} \quad (\text{III. 9})$$

Используя преобразование типа (1. 8), запишем уравнение (III. 6) в виде [ср. с уравнением (1. 1)]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega, r) = \delta_{\alpha\beta} - i \sum_{i, e} \frac{4\pi e^2}{M\omega} \int dv_0 v_{\alpha}(t) \times \\ \times \left\{ \left( M \frac{\partial F_0}{\partial \varepsilon} - \frac{k_b}{\omega} \Phi_{\perp} - \frac{k_{\tau}}{\omega} \Phi_{\parallel} \right) \int_{-\infty}^t v_{\beta}(t') A(t, t') dt' - \right. \\ \left. - \frac{i\delta_{b\beta}}{\omega} \Phi_{\perp} + \frac{i\delta_{b\tau}}{\omega} \Phi_{\parallel} \right\}, \end{aligned} \quad (\text{III. 10})$$

где

$$\Phi_{\perp} = \frac{B_z}{B} r \frac{\partial F_0}{\partial P_{\Phi}} - \frac{B_{\Phi}}{B} \frac{\partial F_0}{\partial P_z}, \quad \Phi_{\parallel} = \frac{B_z}{B} \frac{\partial F_0}{\partial P_z} + \frac{B_{\Phi}}{B} r \frac{\partial F_0}{\partial P_{\Phi}}.$$

Закон движения частиц в винтовом цилиндрически симметричном магнитном поле может быть записан следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \omega \sin \alpha; & \frac{d\Phi}{dt} &= \frac{1}{r} \left( u \frac{B_{\Phi}}{B} - \omega \cos \alpha \frac{B_z}{B} \right); \\ \frac{dz}{dt} &= u \frac{B_z}{B} + \omega \cos \alpha \frac{B_{\Phi}}{B}; \\ \frac{d\omega}{dt} &= \omega_B (u_2 \sin \alpha + 2u_4 \sin 2\alpha); \\ \frac{du}{dt} &= -\frac{\omega}{u} \frac{d\omega}{dt}; \\ \frac{d\alpha}{dt} &= -\omega_B \left\{ 1 + \frac{1}{\omega} [-\cos \alpha (u_2 + 2u_3) + 2u_4 (1 - \cos 2\alpha) + u_5] \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (\text{III. 11})$$

где

$$\begin{aligned} u_2 &= \frac{u^2}{r\omega_B} \left( \frac{B_{\Phi}}{B} \right)^2; & u_3 &= \frac{\omega^2}{2r\omega_B} \left( \frac{B_z}{B} \right)^2; \\ u_4 &= \frac{u\omega}{A\omega_B} r \mu' \left( \frac{B_z}{B} \right)^2; & u_5 &= \frac{2u\omega}{\omega_B} \mu \left( \frac{B_z}{B} \right)^2; & \mu &= \frac{B_{\Phi}}{rB_z}. \end{aligned}$$

Здесь штрих означает дифференцирование по  $r$ ;  $\omega$ ,  $\alpha$  и  $u$  — компоненты скорости в цилиндрической системе координат.

Предполагая магнитное поле слабо меняющимся на расстояниях порядка ларморовского радиуса частиц, нетрудно найти решение этой системы уравнений. Для наших целей его удобно представить в виде:

$$\left. \begin{aligned} \omega &= \omega_0 + u_2 \cos \alpha \Big|_1^2 + u_4 \cos 2\alpha \Big|_1^2; \\ u - u_0 &= -\frac{\omega_0}{\omega_0} (\omega - \omega_0); \\ \alpha &= \alpha_0 - \omega B t - \frac{1}{\omega_0} (2u_1 + u_2 + 2u_3) \sin \alpha \Big|_1^2 - \frac{u_4}{\omega_0} \sin 2\alpha \Big|_1^2; \\ r(t) &= r + \frac{\omega_0}{\omega B} \cos \alpha \Big|_1^2; \\ m\varphi + k_z z &= m\varphi_0 + k_z z_0 + t k_\tau u_0 - \frac{k_\perp \omega_0}{\omega B} \times \\ &\times \sin(\alpha - \psi) \Big|_1^2 + t(u_1 + u_2) k_b. \end{aligned} \right\} \quad (\text{III. 12})$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} f(\alpha) \Big|_1^2 &= f(\alpha_0 - \omega B t') - f(\alpha_0 - \omega B t); \\ u_1 &= -\frac{\omega_0^2}{2\omega B} \frac{B'}{B}; \quad k_\perp = (k_b^2 + k_r^2)^{1/2}; \quad \psi = \arctg \frac{k_r}{k_b}. \end{aligned}$$

Мы пренебрегли в экспоненте малыми членами типа  $k_\perp^2 Q^2 / L_B$ , где  $L_B$  — характерный размер изменения магнитного поля, в результате чего она приобретает такой же вид, что и в § 1, только вместо  $k_x$  и  $k_z$  здесь стоят  $k_b$  и  $k_\tau$ . (В дальнейшем мы иногда будем опускать также члены типа  $k_b u_1 / \omega$ , малые как отношение скорости микроскопических дрейфов к фазовой скорости волны). Члены, содержащие производные магнитного поля, имеются и в предэкспоненциальных выражениях (III. 10). Здесь они малы по сравнению с остальными как  $Q/L_B$ . Вследствие дополнительной малости старших членов, которая может возникнуть при усреднении по углам, результирующий вклад старших членов, может стать порядка  $(Q/L_B) \frac{\omega B}{\omega} \sim v_{Ti} / L_B \omega$ .

Нетрудно видеть, что такие члены следует учитывать в случае достаточно длинных волн, когда  $v_{Ti} / L_B \omega \sim \frac{a}{L_B} \frac{\lambda_\perp}{Q_i} \gtrsim 1$ , т. е. при  $k_\perp Q_i \lesssim a / L_B$ , тогда как при более коротких волнах ими можно пренебречь. Кроме того, в предэкспоненциальных выражениях имеются члены типа  $Q/r$ , которые также должны быть учтены.

Учитывая эти замечания и выбирая  $F_0$  близкой к максвелловской (так что максвелловской является функция центров ларморовских кружков), можно характеризовать диэлектрическую проницаемость плазмы в винтовом магнитном поле при  $\omega/k_b \gg u_1, u_2$  выражениями типа

$$\begin{aligned} \epsilon_{\alpha\beta} &= \epsilon_{\alpha\beta}^{\text{пл}} + \delta\epsilon_{\alpha\beta}, \\ \chi_\beta &= \chi_\beta^{\text{пл}} + \delta\chi_\beta, \end{aligned} \quad (\text{III. 13})$$

где  $\epsilon_{\alpha\beta}^{\text{пл}}$  и  $\chi_\beta^{\text{пл}}$  имеют такой же вид, что и  $\epsilon_{\alpha\beta}, \chi_\beta$  в § 1 (с заменой  $k_x, k_z \rightarrow k_b, k_\tau$  и  $\partial/\partial y \rightarrow \partial^0/\partial r \equiv \frac{dn_0}{dr} \frac{\partial}{\partial n_0} + \frac{dT}{dr} \frac{\partial}{\partial T}$ ), а  $\delta\epsilon_{\alpha\beta}$  и  $\delta\chi_\beta$  существенны лишь для длин-

новолновых низкочастотных колебаний и при этих условиях отличные от нуля элементы имеют вид:

$$\begin{aligned} \delta \varepsilon_{\tau b} &= - \sum_{i, e} \frac{4\pi e^2}{T\omega} \int d\omega_0^2 \cdot 2\pi du_0 \cdot f_0 \cdot u_0 \zeta_0 \cdot (u_1 + u_2 + u_3); \\ \delta \chi_b &= \sum_{i, e} \frac{ie^2}{T} \int d\omega_0^2 \cdot 2\pi du_0 f_0 \zeta_0 (u_1 + u_2 + u_3) \end{aligned} \quad (\text{III. 14})$$

(остальные компоненты  $\delta \varepsilon_{\alpha\beta}$  и  $\chi_\beta$  несущественны).

Заметим, что при получении выражений (III. 13) и (III. 14) мы не учли зависимости  $F_0$  от комбинации  $P_\Phi, P_z$ , аналогичной  $V_z$  в § 1, предположив тем самым, что равновесный ток, текущий вдоль силовых линий (так как  $B_\Phi \neq 0$ ), несуществен для рассматриваемых всюду в настоящей работе колебаний с очень малыми  $k_\tau$ .

Используем полученные выше выражения  $\varepsilon_{\alpha\beta}$  и  $\chi_\beta$  для исследования медленных волн в винтовом магнитном поле.

Из уравнения Максвелла для тока по направлению  $r$  получаем следующее соотношение, аналогичное выражению (2. 5'), но учитывающее и члены порядка  $\beta$ :

$$\begin{aligned} E_r &= - \frac{i}{k_b} E'_b - \frac{i}{rk_b} \left( \frac{B_z}{B} \right)^2 E_b + \\ &+ \frac{\omega^2}{k_b^2 c^2} \sum_{i, e} \left[ \hat{\varepsilon}_{rb} E_b + \hat{\varepsilon}_{rr} \left( - \frac{i}{k_b} E'_b \right) + \varepsilon_{r\tau} E_\tau \right] \equiv \\ &\equiv - \frac{i}{k_b} E'_b + \hat{\Lambda}_b E_b + \hat{\Lambda}_\tau E_\tau. \end{aligned} \quad (\text{III. 15})$$

Используя выражения для  $\varepsilon_{\alpha\beta}$  из § 1, нетрудно найти, что входящая сюда комбинация  $\varepsilon_{rb} E_b + \varepsilon_{rr} \left( - \frac{i}{k_b} E'_b \right)$  может быть записана так:

$$\begin{aligned} &\hat{\varepsilon}_{rb} E_b + \hat{\varepsilon}_{rr} \left( - \frac{i}{k_b} E'_b \right) = \\ &= \sum_{i, e} \int e^{ik_r r} dk_r \frac{k_\perp}{k_b} \left( 1 + \frac{k_b}{M\omega\omega_B} \frac{\partial^0}{\partial r} T \right) \times \\ &\times (\varepsilon_{rb}^0 \cos \psi + \varepsilon_{bb}^0 \sin \psi) E_b(k_r). \end{aligned} \quad (\text{III. 16})$$

Подставляя  $E_r$ , выраженное через  $E_b$  и  $E_\tau$ , в два другие электродинамические уравнения, использованные в § 1, получим:

$$4\pi \sum_{i, e} \left\{ \left( \hat{\chi}_b E_b - \frac{i}{k_b} \hat{\chi}_r E'_b + \hat{\chi}_\tau E_\tau \right) + \hat{\chi} (\hat{\Lambda}_b E_b + \hat{\Lambda}_\tau E_\tau) \right\} = \text{div } E; \quad (\text{III. 17})$$

$$\begin{aligned} &\left( k_b^2 - \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) E_\tau - k_\tau k_b E_b + 2 \frac{k'_\tau}{k_b} E'_b + \frac{k_\tau}{k_b} E_b'' = \\ &= \frac{\omega^2}{c^2} \sum_{i, e} \left\{ \hat{\varepsilon}_{\tau b} E_b + \hat{\varepsilon}_{\tau r} \left( - \frac{i E'_b}{k_b} \right) + \varepsilon_{\tau\tau} E_\tau + \hat{\varepsilon}_{\tau r} (\hat{\Lambda}_b E_b + \hat{\Lambda}_\tau E_\tau) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{III. 18})$$

Вскоре мы увидим, что члены с  $\hat{\Lambda}$  нужно удерживать лишь при рассмотрении длинноволновых колебаний ( $k_\perp^2 \varrho_i^2 \ll 1$ ), тогда же, когда существенны и добавки  $\delta \varepsilon_{\tau b}$  и  $\delta \chi_b$ . В тех же случаях, когда все эти выражения несущественны, уравне-

ния (III. 17) и (III. 18) принимают более простой вид, аналогичный системе уравнений (2. 7):

$$\left. \begin{aligned} & \int e^{ik_r r} dk_r \left\{ \frac{1}{k_b} (k_{\perp}^2 \varepsilon_{\perp} - ik_r \tilde{\varepsilon}'_{\perp}) E_b(k_r) + \right. \\ & \left. + k_{\tau} \varepsilon_{\parallel} E_{\tau}(k_r) \right\} = 0; \\ & \int e^{ik_r r} dk_r \left\{ \left( k_{\perp}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{\parallel} \right) E_{\tau}(k_r) - \right. \\ & \left. - \frac{k_{\tau}}{k_b} \left( k_{\perp}^2 - 2ik_r \frac{k'_{\tau}}{k_{\tau}} \right) E_b(k_r) \right\} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (\text{III. 19})$$

где величины  $\varepsilon_{\perp}$ ,  $\tilde{\varepsilon}'_{\perp}$  и  $\varepsilon_{\parallel}$  имеют такой же вид, что и в § 2.

Теперь выясним, когда справедливы эти упрощенные уравнения. Для этого предположим, что  $k_{\perp}^2 \varrho_i^2 \ll 1$  и разложим в ряды функции Бесселя, входящие в  $\varepsilon_{\alpha\beta}$ . Тогда уравнения (III. 17) и (III. 18) можно записать так:

$$E_b \left\{ \varepsilon_{\perp}^* + \sum_{i, e} \frac{4\pi e^2}{M\omega\omega_B} \frac{1}{k_b R} \left( 1 + \frac{k_b}{M\omega\omega_B} \frac{\partial^0}{\partial r} T \right) \times \right. \\ \left. \times n_0 [ix\sqrt{\pi}W_0 + 2x^2(1 + i\sqrt{\pi}xW_0)] \right\} - \quad (\text{III. 17'})$$

$$- \frac{1}{k_b^2} \frac{\partial}{\partial r} (E'_b \varepsilon_{\perp}) + E_{\tau} \frac{k_{\tau}}{k_b} \left\{ \varepsilon_{\parallel}^* + (\text{члены порядка } \beta) \right\} = 0;$$

$$\left( k_b^2 - \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) E_{\tau} - \frac{k_{\tau}}{k_b} \left( k_b^2 - \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) E_b + \frac{2k'_{\tau}}{k_{\tau}} E'_b =$$

$$= \frac{\omega^2}{c^2} \left\{ \left( \varepsilon_{\parallel}^* + \frac{\omega^2}{c^2 k_b^2} \varepsilon_{\tau\beta} \varepsilon_{b\tau} \right) E_{\tau} + E_b \sum_{i, e} \frac{4\pi e^2}{M\omega\omega_B} \times \right.$$

$$\left. \times \frac{1}{k_{\tau} R} \left( 1 + \frac{k_b}{M\omega\omega_B} \frac{\partial^0}{\partial r} T \right) n_0 [2 + i\sqrt{\pi}xW_0 + 2x^2(1 + i\sqrt{\pi}xW_0)] \right\} \quad (\text{III. 18'})$$

Здесь  $\varepsilon_{\perp}^*$ ,  $\varepsilon_{\parallel}^*$  определяются уравнениями типа (2. 8) при  $z \rightarrow 0$ , т. е.

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{\perp}^* &= 1 + \frac{4\pi e^2 n_0}{M_i \omega_{Bi}^2} \left( 1 - \frac{k_b v_0^i}{\omega} \right) \equiv 1 + \frac{c^2}{c_A^2} \left( 1 - \frac{k_b v_0^i}{\omega} \right); \\ \varepsilon_{\parallel}^* &= 1 + \sum_{i, e} \frac{4\pi e^2}{T k_{\tau}^2} \left( 1 + \frac{k_b T}{M\omega\omega_B} \frac{\partial^0}{\partial r} \right) n_0 (1 + i\sqrt{\pi}xW_0); \\ v_0^i &= - \frac{1}{M_i n_0 \omega_{Bi}} \frac{\partial p_i}{\partial r}; \quad x = \frac{\omega}{k_{\tau} v_{T}}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{III. 20})$$

Видно, что учтенные добавки никогда не могут существенно влиять на коэффициенты перед  $E_{\tau}$ , лишь изменяя их на величину порядка  $\beta \ll 1$ . Однако коэффициенты перед  $E_b$  более чувствительны к этим добавкам: они существенно изменяются в случае длинноволновых колебаний, когда

$$\varrho_i^2 k_{\perp}^2 \lesssim \frac{a}{R}. \quad (\text{III. 21})$$

Таким образом, теперь можно сформулировать условия применимости упрощенных уравнений (III. 19): волны должны быть не слишком длинными, так что  $k_{\perp}^2 \varrho_i^2 \gg a/R$ . Если же волны очень длинны ( $\varrho_i^2 k_{\perp}^2 \lesssim a/R$ ), то вместо уравнений



(III. 19) следует пользоваться уравнением, вытекающим из уравнений (III. 17') и (III. 18'):

$$\begin{aligned} & k_b^2 \left( k_b^2 - \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) \frac{1}{\varepsilon_{\parallel}^* k_{\tau}} \left\{ \varepsilon_{\perp}^* - \sum_{i, e} \frac{4\pi e^2}{M\omega\omega_B} \frac{1}{Rk_b} \times \right. \\ & \times \left( 1 + \frac{k_b}{M\omega\omega_B} \frac{\partial^0}{\partial r} T \right) n_0 [2x^2 (1 + i\sqrt{\pi}xW_0) + i\sqrt{\pi}xW_0] - \\ & \left. - \frac{1}{k_b^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( \varepsilon_{\perp}^* \frac{\partial}{\partial r} \right) \right\} E_b + k_{\tau} \left( k_b^2 - \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) E_b - 2k'_{\tau} E'_b = \\ & = \frac{k_b^2}{k_{\tau}} \left[ \left( \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{\perp}^* + \frac{8\pi\rho'}{RB_0^2} \right) E_b - \frac{\omega^2}{c^2 k_b^2} \frac{\partial}{\partial r} (\varepsilon_{\perp}^* E'_b) \right]. \quad (\text{III. 22}) \end{aligned}$$

Исследование системы уравнений (III. 19) и уравнения (III. 22) проведено в § 5—7.

Так обстоит дело с исходными уравнениями для волн, у которых фазовая скорость  $\omega/k_b$  значительно превосходит скорости микроскопических дрейфов  $u_1$  и  $u_2$ . Если же  $\omega/k_b \lesssim u_1, u_2$ , то в таком случае  $\varepsilon_{\alpha\beta}$ , как нетрудно проверить, можно найти с помощью формулы (1. 14), в которой надо заменить:  $(x, y, z) \rightarrow (b, r, \tau)$ ;  $\frac{\partial}{\partial y} \rightarrow \frac{\partial^0}{\partial r}$ ;  $\zeta_n \rightarrow [\omega - n\omega_B - k_{\tau}u - k_b(u_1 + u_2)]^{-1}$ , а в выражениях (1. 23) и (1. 24) нужно считать  $q_{\alpha}^*$ ,  $q_r$ ,  $q_{\tau}$  и  $\rho_{\alpha}$  прежними, тогда как вместо  $q_b$  следует брать  $q_b + \delta q_b$ , где

$$\delta q_b = (u_1 + u_2 + u_3) J_n. \quad (\text{III. 23})$$

Подставляя в уравнения Максвелла получающееся в результате  $\varepsilon_{\alpha\beta}$ , можно получить систему уравнений для амплитуд электрического поля волны.

## П Р И Л О Ж Е Н И Е IV

### ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ТИПОВ КОЛЕБАНИЙ

1. Получим уравнение, описывающее безвихревые колебания плазмы при произвольном отношении частоты колебаний к циклотронной частоте.

Полагая  $E = -\nabla\phi$  и используя соотношения (1. 35), (1. 37)—(1. 42), находим искомое уравнение

$$\int e^{ik_y y} \left( k^2 \varepsilon_0 - ik_y \frac{\partial^2}{\partial y \partial k_{\perp}^2} k^2 \varepsilon_0 \right) \phi(k_y) dk_y = 0, \quad (\text{IV. 1})$$

где  $\varepsilon_0$  играет роль скалярной диэлектрической проницаемости:

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 = 1 + \sum_{i, e} \frac{4\pi e^2}{k^2 T} \left( 1 + \frac{k_x T}{m\omega\omega_B} \frac{\partial}{\partial y} \right) n_0 \times \\ \times \left( 1 + i\sqrt{\pi} \frac{\omega}{k_z v_T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} I_n e^{-z} W_n \right). \quad (\text{IV. 2}) \end{aligned}$$

2. Получим уравнение, описывающее обыкновенную волну, распространяющуюся поперек магнитного поля при произвольном  $\omega/\omega_B$ .

При  $k_z = 0$  система уравнений Максвелла распадается на две подсистемы, одна из которых представляет собой искомое уравнение для обыкновенной волны ( $E_z \neq 0, E_x = E_y = 0$ ):

$$\int \left[ k_{\perp}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{zz}(k_y) \right] e^{ik_y y} E_z(k_y) dy = 0. \quad (\text{IV. 3})$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. Шафранов В. Д. Электромагнитные волны в плазме. См. настоящий выпуск, стр. 3.
2. Брагинский С. И. Явления переноса в плазме. В кн. «Вопросы теории плазмы». Вып. 1. М., Госатомиздат, 1963.
3. Градштейн И. С. и Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962.
4. Фаддеев В. Н., Терентьев Н. М. Таблицы значений интеграла вероятностей от комплексного аргумента. М., Гостехиздат, 1954.
5. Церковников Ю. А. «Ж. эксперим. и теор. физ.» 33, 67 (1957).
6. Рудаков Л. И., Сагдеев Р. З. «Докл. АН СССР», 138, 581 (1961).
7. Рудаков Л. И., Сагдеев Р. З. «Ядерный синтез», Дополнение 1962, кн. 2, 481 (1962).
8. Рудаков Л. И., Сагдеев Р. З. В кн. «Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций». Т. III. М., Изд-во АН СССР, 1958, стр. 268.
9. Rosenbluth M. N., Krall N. A., Rostoker N. «Ядерный синтез», Дополнение 1962, кн. 1, 143 (1962).
10. Рудаков Л. И. «Ядерный синтез», 2, вып. 1, 107 (1962).
11. Михайловский А. Б. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 43, 509 (1962).
12. Михайловский А. Б. «Ядерный синтез», 2, вып. 3—4, 162 (1962).
13. Кадомцев Б. Б., Тимофеев А. В. «Докл. АН СССР», 146, 581 (1962).
14. Михайловский А. Б., Рудаков Л. И. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 44, вып. 3, 912 (1963).
15. Галеев А. А., Ораевский В. Н., Сагдеев Р. З. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 44, вып. 3, 902 (1963).
16. Михайловская Л. В., Михайловский А. Б. «Ж. техн. физ.», 10 (1963).
17. Михайловский А. Б., Тимофеев А. В. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 44, вып. 3, 919 (1963).
18. Михайловский А. Б. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 44, вып. 5, 1552 (1963).
19. Днестровский Ю. Н., Костомаров Д. П. «Ж. эксперим. и теор. физ.» 41, 1527 (1961).
20. Днестровский Ю. Н., Костомаров Д. П. «Ж. эксперим. и теор. физ.» 40, 1404 (1961).
21. Силин В. П. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 44, вып. 4, 1271 (1963).
22. Галеев А. А. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 44, вып. 6, 1920 (1963).
23. Rosenbluth M. N. Harwell, 17—22, sept., 1962.
24. Кадомцев Б. Б. Гидромагнитная устойчивость плазмы. В кн. «Вопросы теории плазмы». Вып. 2. М., Госатомиздат, 1963.
25. Kruskal M., Schwarzschild M. Proc. Roy. Soc., A 233, 348 (1954).
26. Roberts K. V., Taylor J. V. Phys. Rev. Let., 8, 197 (1962).
27. Bernstein I., Frieman E., Kruskal M., Kulsrud R. Proc. Roy. Soc., A 244, 17 (1958).
28. Велихов Е. П. «Ж. техн. физ.», 31, 180 (1961).
29. Кадомцев Б. Б. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 40, 328 (1961).
30. Михайловская Л. В., Михайловский А. Б. «Докл. АН СССР», 150, № 3, 531 (1958).
31. Сайдем Б. Р., Михайловская Л. В., Михайловский А. Б. «Ядерный синтез», 3, вып. 2 (1953). В кн. «Труды Второй международной конференции по мирному использованию атомной энергии». Избр. докл. иностр. ученых. Т. I — «Физика горячей плазмы и термоядерные реакции». М., Атомиздат, 1959, стр. 89.

## ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ СЛАБОТУРБУЛЕНТНОЙ ПЛАЗМЫ

А. А. Веденов

### Взаимодействие плазмонов с частицами

Характернейшим свойством плазмы является наличие спектра коллективных колебаний — плазменных волн (плазмонов). Частота колебаний и скорость распространения этих волн определяются величиной волнового вектора и «грубыми» параметрами плазмы: плотностью, средним разбросом скоростей частиц, магнитным полем и т. п.; это обстоятельство является отражением того факта, что в плазменных колебаниях принимают участие все частицы коллектива. Иначе обстоит дело со скоростью затухания (или возрастания) этих колебаний — она определяется «тонкими деталями» распределения частиц в фазовом пространстве, например, производными функции распределения по скорости; это указывает на специфическую роль резонансных частиц (таких, для которых выполняется условие  $\omega_k - kv = n\omega_H$ ;  $n = 0, 1, 2, \dots$ ;  $\omega_k$  и  $k$  — частота и волновой вектор колебания;  $v$  — скорость частицы;  $\omega_H = eH/mc$ ), которые, обмениваясь энергией с волнами, усиливают или ослабляют их.

Важная роль таких частиц в затухании плазменных волн видна уже из того факта, что декремент затухания волны с частотой  $\omega$  и волновым числом  $k$  в термодинамически-равновесной плазме, найденный Ландау [1] с помощью уравнений с самосогласованным полем [2, 3], оказался пропорциональным производной электронной функции распределения  $f'(v)$ , взятой в точке  $v = \omega_k/k$ .

В целом ряде более поздних работ отчетливо выявилось то обстоятельство, что декремент затухания (или инкремент нарастания) волн в разреженной плазме пропорционален производной функции распределения резонансных частиц (см. например [4]).

Подробный физический анализ процесса взаимодействия частиц плазмы с распространяющимися в ней волнами (а также анализ вопросов, касающихся распространения плазменных

волн) был проведен Бомом, Гроссом и Пайнсом [5], отметившими важность частиц, которые являются резонансными для каждой данной волны.

Таким образом, определяющая роль резонансных частиц в поглощении и рождении плазменных волн была хорошо известна.

С другой стороны, неоднократно поднимался вопрос о влиянии плазменных волн на процессы переноса в разреженной плазме. Вопрос этот возникал в связи с неопределенностью известного «кулоновского логарифма» в члене столкновений кинетического уравнения разреженной плазмы [6, 3]. Оценка вклада плазменных волн в кинетические коэффициенты для плазмы, находящейся вблизи от состояния термодинамического равновесия, проведенная Давыдовым [7], показала, что учет процессов испускания и поглощения плазменных волн частицами (наряду с процессами парных столкновений частиц) приводит к изменению величины, стоящей под знаком «кулоновского логарифма»\*.

Ясно, однако, что независимый учет этих двух процессов для плазмы, близкой к термодинамически-равновесному состоянию, является превышением точности, поскольку точное значение величины, стоящей под знаком «кулоновского логарифма», остается при таком подходе неизвестным. При последовательном же формальном расчете [12] кинетических коэффициентов процессы столкновения частиц между собой и процессы испускания—поглощения волн частицами разделить невозможно — они учитываются одновременно.

Иначе обстоит дело, если мы рассматриваем слаботурбулентную плазму, в которой плотность энергии, содержащейся в волнах (плазменных колебаниях) еще мала по сравнению с плотностью тепловой энергии, но значительно превышает плотность энергии термодинамически равновесных плазменных шумов (такая ситуация не только возможна, но и часто реализуется в разреженной плазме, см. ниже). В этом случае можно вначале вообще не принимать во внимание процессов столкновений частиц между собой и описывать поведение плазмы с помощью уравнений с самосогласованным полем. Оказывается, что эти уравнения можно заменить более простыми уравнениями квазилинейной теории [4, 13—15]: уравнением для скорости роста (затухания) энергии плазменных волн и уравнений диффузионного типа для функции распределения резонансных частиц плазмы (причем коэффициент диффузии пропорционален плотности энергии волн в турбулентной плазме).

---

\* Идеи работы [7] развивались Галицким, а также Романовым и Филипповым [9], постулировавшими систему кинетических уравнений для системы электронов и плазменных волн по аналогии с кинетическими уравнениями для электронов и фононов в твердом теле. Аналогичные уравнения исследовались Силиным, Климонтовичем (см., например, [10]) и Пайнсом и Шриффером [11].

Нужно подчеркнуть, что вывод уравнений квазилинейной теории из уравнений с самосогласованным полем удастся провести лишь в том случае, когда резонансные частицы образуют небольшую группу, не изменяющую существенно «грубых» характеристик плазмы (плотности, температуры и т. п.).

Квазилинейная теория, основы которой изложены ниже, описывает динамику взаимодействия резонансных частиц с волнами. Последовательный вывод уравнений и рассмотрение таких процессов оказывается возможным в случае, когда энергия, сосредоточенная на коллективных степенях свободы — плазменных колебаниях, значительно меньше энергии хаотического движения всех частиц и, в то же время, намного превышает энергию тепловых шумов на коллективных степенях свободы.

Сущность метода квазилинейной теории состоит в разбиении функции распределения резонансных частиц на быстро осциллирующую и медленно меняющуюся части и в учете влияния среднего квадрата осциллирующей части на медленно меняющуюся часть (метод, близкий к известному в нелинейной механике методу Ван дер Поля). При этом оказывается, что поведение медленной части функции распределения описывается уравнением диффузии в фазовом пространстве, а скорость роста или затухания быстрых осцилляций (плазменных колебаний) определяется формулами линейной теории, в которых неосциллирующая часть функций распределения медленно меняется со временем.

Известно, что в однородной разреженной плазме в условиях, когда столкновения между частицами не играют существенной роли, имеется большой произвол для стационарной функции распределения частиц по скоростям. Квазилинейная теория указывает на существование выделенных состояний, к которым приходит неустойчивая плазма в результате развития в ней возмущений.

Эти состояния характерны тем, что в них функция распределения  $f$  в некоторых областях фазового пространства оказывается постоянной (на функции  $f$  появляются «плато»), а в соответствующих областях пространства волновых чисел плазменных колебаний присутствуют шумы с уровнем, значительно превышающим тепловой.

### Основные уравнения квазилинейной теории

Выведем основные уравнения квазилинейной теории для полностью ионизованной разреженной плазмы. Будем считать, что функции распределения  $f_\alpha$  частиц сорта  $\alpha$  с зарядом  $e_\alpha$  и массой  $m_\alpha$  подчиняются системе уравнений с самосогласованным полем

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + v \frac{\partial f_\alpha}{\partial x} + \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \left( E + \frac{v}{c} \times H \right) \frac{\partial f_\alpha}{\partial v} = 0, \quad (1)$$

где самосогласованные поля  $E$  и  $H$  в свою очередь определяются распределением всех зарядов плазмы:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} &= 4\pi \sum_{\alpha} e_{\alpha} \int f_{\alpha} dv; \quad \nabla \times E = -c^{-1} \partial H / \partial t; \\ \nabla \times H &= 4\pi c^{-1} \sum_{\alpha} e_{\alpha} \int v f_{\alpha} dv + c^{-1} \partial E / \partial t. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Система уравнений с самосогласованным полем (1)—(2) правильно описывает поведение плазмы, если последняя является почти идеальной\*, т. е. если усредненная амплитуда кулоновского рассеяния пары частиц  $e^2/T$  (где  $T$  — средняя кинетическая энергия частицы) значительно меньше среднего расстояния между частицами  $r \approx n^{-1/3}$  (где  $n$  — плотность плазмы). В этих условиях число частиц в сфере дебаевского радиуса  $N_D \approx n(T/ne^2)^{3/2}$  значительно больше единицы, и величина  $N_D^{-1}$  представляет собой малый параметр, по которому и проводится обычно разложение точных уравнений движения всех частиц плазмы, приводящее в первом приближении к системе (1)—(2), а в следующем — к появлению члена столкновений в правой части уравнения (1) [3]. Однако, если мы рассматриваем вопросы динамики такой плазмы\*\*, то оказывается, что параметр  $N_D^{-1}$  не является единственным малым параметром в задаче о разреженной плазме. Действительно, в разреженной плазме существуют плазменные колебания. Например, для плазмы без магнитного поля — это электронные ленгмюровские и ионно-звуковые колебания, частота и скорость распространения которых определяются грубыми свойствами плазмы (плотностью, средним разбросом скоростей и т. д.). Декремент (или инкремент) этих колебаний зависит уже от тонких деталей распределения частиц в фазовом пространстве. Частицы плазмы, испытывая беспорядочное воздействие электрического поля многих волн, диффундируют в фазовом пространстве. При этом меняются именно те детали функции распределения частиц, которые определяют затухание волн. Грубые свойства системы при этих процессах не меняются; энергия волн слишком мала для того, чтобы в процессе ее изменения могли проявиться заметные поправки к средней плотности плазмы, к различным моментам функции распределения и т. д.

Скорость диффузии частиц в пространстве скоростей под действием волн пропорциональна плотности энергии этих волн  $\epsilon$ .

\* Кроме того, мы будем дальше считать, что эффекты квантового вырождения несущественны (это условие налагает еще одно ограничение на плотность плазмы: эффекты вырождения несущественны, если  $\lambda \ll r$ , где  $\lambda \approx \hbar/mv$  — средняя длина волны частицы).

\*\* В отличие от задачи о свойствах термодинамически равновесной, почти идеальной плазмы, где отношение средней амплитуды рассеяния при парном столкновении к среднему расстоянию между частицами представляет собой единственный малый параметр, последовательным разложением по которому можно найти уравнение состояния такой плазмы [17].

Если отношение  $\epsilon/nT$  значительно превышает величину  $N_D^{-1}$ , то эффект «диффузии на волнах» намного превысит эффект столкновений между частицами (также приводящий к диффузии в пространстве скоростей), и столкновениями между частицами в первом приближении можно пренебречь.

Отношение плотности энергии неравновесных плазменных колебаний к плотности кинетической энергии  $\epsilon/nT$  представляет собой второй малый параметр задач динамики разреженной плазмы. В дальнейшем будем считать выполненным условие

$$1 \gg \frac{\epsilon}{nT} \gg N_D^{-1},$$

физический смысл которого состоит в том, что плотность энергии на коллективных степенях свободы системы — плазменных волнах — намного превышает плотность энергии кулоновского взаимодействия:  $\epsilon \gg nT/N_D^*$ . В то же время  $\epsilon$  гораздо меньше плотности тепловой энергии  $nT$ .

Уравнения квазилинейной теории получим, разлагая систему уравнений с самосогласованным полем (1)—(2) по малому параметру  $\epsilon/nT$ , путем учета членов, квадратичных по амплитуде плазменных колебаний.

Для определенности рассмотрим случай электронных продольных ленгмюровских колебаний в плазме без магнитного поля. В качестве исходных уравнений выберем уравнение с самосогласованным полем для функции распределения электронов

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{eE}{m} \frac{\partial f}{\partial v} \quad (3)$$

и уравнение

$$4\pi en \int v f dv = -\partial E / \partial t \quad (4)$$

(здесь  $n$  — равновесная плотность плазмы, так что в равновесии  $\int f_0 dv = 1$ ). Как известно из линейной теории, гармонические (во времени) решения уравнений (3)—(4) описывают ленгмюровские колебания; декремент затухания этих колебаний в равновесной плазме мал по сравнению с их частотой, если длина волны значительно превышает дебаевский радиус. Действительно, переходя в линеаризованных уравнениях (3)—(4) к пространственным компонентам Фурье

$$f = f_0 + \sum_k G_k e^{ikx};$$

$$E = \sum_k E_k e^{ikx},$$

\* Величина  $nT/N_D$ , с точностью до числового множителя порядка единицы равна известной дебаевской поправке к свободной энергии системы частиц с кулоновским взаимодействием; эта же величина характеризует плотность энергии тепловых плазменных волн.

получаем, пренебрегая для длинных волн членом  $v \frac{\partial f}{\partial x}$ :

$$\dot{G}_k = -\frac{e}{m} E_k \frac{\partial f_0}{\partial v};$$

$$\dot{E}_k = -4\pi en \int v G_k dv,$$

откуда следует, что длинноволновая спектральная компонента поля удовлетворяет уравнению осциллятора

$$\ddot{E}_k = -\omega_p^2 E_k \quad (5)$$

с ленгмюровской частотой  $\omega_p = (4\pi ne^2/m)^{1/2}$ . В этих колебаниях принимают участие все частицы плазмы, причем кинетическая энергия движения всех частиц в такой волне равна электростатической энергии (теорема вириала):

$$\frac{1}{2} nm \left| \int v G_k dv \right|^2 = \frac{E_k^2}{8\pi},$$

так что полная энергия колебания равна  $E_k^2/4\pi$ . Колебание с волновым числом  $k$  не затухает, если в плазме отсутствуют частицы со скоростью  $v \geq \omega_p/k$  [в этом случае можно пренебречь членом  $v \partial f / \partial x \propto kv G_k$  по сравнению с  $\partial f / \partial t \propto \omega_p G_k$ , что и было сделано при выводе уравнения (5)].

Если в плазме присутствуют электроны, скорости которых совпадают с фазовой скоростью  $\omega_p/k$  какой-либо из ленгмюровских волн, то становится возможным обмен энергией между волнами и этими «резонансными» электронами. Будем предполагать, что число резонансных частиц мало, и пренебрежем тем изменением дисперсионных свойств плазмы (частоты колебаний, фазовой и групповой скорости — но не затухания!), которое обусловлено резонансными частицами. В рассматриваемом здесь случае это означает, что и при наличии резонансных электронов мы будем считать частоту ленгмюровских колебаний равной  $\omega_p$ .

Взаимодействие плазменных колебаний с резонансными частицами приведет к двум эффектам: во-первых, будет меняться средняя энергия ленгмюровских осцилляторов  $E_k^2/4\pi$ ; во-вторых, одновременно будет меняться распределение резонансных электронов в пространстве скоростей. Для вывода уравнений, описывающих эти процессы, поступим следующим образом.

Представим функцию распределения резонансных частиц  $F$  в виде суммы быстро осциллирующей части  $\sum_k F_k e^{ikx}$  и медленно меняющейся функции  $\bar{F}$ ; при этом электрические поля  $E = \sum_k E_k e^{ikx}$  будут иметь вид произведений быстро осциллирующих в пространстве и времени функций на медленно меняющиеся амплитуды (предполагается, что среднее поле равно нулю). Сред-



ние за время, много большее периода плазменных колебаний, значения осциллирующей части функции распределения и электрического поля равны нулю:

$$\langle F_k \rangle = \langle E \rangle = 0,$$

так что  $\bar{F}$  представляет собой среднее значение полной функции распределения резонансных электронов  $F$ . В кинетическом уравнении для резонансных электронов

$$\frac{\partial F}{\partial t} + v \frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{eE}{m} \frac{\partial F}{\partial v} \quad (6)$$

проведем усреднение по пространству:

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial t} = -\frac{eE}{m} \frac{\partial \bar{F}}{\partial v} = -\frac{\partial}{\partial v} \frac{e}{m} \sum_k E_k^+ F_k. \quad (7a)$$

Далее, вычитая уравнение (7a) из уравнения (6) и пренебрегая разностью  $E \partial F / \partial v - E \partial \bar{F} / \partial v$ , получаем

$$\dot{F}_k + ikvF_k = -\frac{eE_k}{m} \frac{\partial \bar{F}}{\partial v}. \quad (7б)$$

Из кинетического уравнения для нерезонансных частиц имеем

$$\dot{G}_k = -\frac{eE_k}{m} \frac{\partial f_0}{\partial v},$$

и следовательно, производная по времени от плотности тока, создаваемого всеми частицами плазмы, за исключением резонансных, есть

$$ne \int v \dot{G}_k = \frac{ne^2}{m} E_k.$$

Учитывая это равенство, из уравнения для полного тока (4) получаем

$$\dot{E}_k + \omega_p^2 E_k = 4\pi en \int v \dot{F}_k dv. \quad (7в)$$

Проинтегрируем (7б):

$$F_k(t) = F_k(0) e^{-ikvt} - \frac{e}{m} \int_0^t dt' E_k(t') \frac{\partial \bar{F}(t')}{\partial v} e^{ikv(t-t')}$$

\* Эта разность дала бы в уравнении (7б) члены, нелинейные по  $E$  — такие члены соответствуют взаимодействию плазменных волн между собой. Влияние подобных процессов мало, если плазма возбуждена не слишком сильно.

и, подставив это выражение в уравнение (7в), умножим обе части получившегося равенства на  $\dot{E}_k^+$  и сложим с комплексно-сопряженным выражением:

$$\begin{aligned} \dot{E}_k^+ (\ddot{E}_k + \omega_p^2 E_k) + c. c. &= \frac{d}{dt} (|\dot{E}_k|^2 + \omega_p^2 |E_k|^2) = \\ &= 4\pi en \dot{E}_k^+ \int v dv \left\{ -ikv F_k(0) e^{-ikvt} - \frac{eE_k(t)}{m} \frac{\partial \bar{F}(t)}{\partial v} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{e}{m} ikv \int_0^t dt' E_k(t') \frac{\partial \bar{F}(t')}{\partial v} e^{-ikv(t-t')} \right\} + c. c. \end{aligned}$$

Подставляя в это равенство  $E_k(t) = \sqrt{\varepsilon_k(t)} e^{-i\omega_p t}$  и вынося медленно меняющиеся функции  $\varepsilon_k$  и  $\partial \bar{F}/\partial v$  за знак интеграла по  $t'$ , получаем уравнение для квадрата амплитуды волны:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} 2\omega_p^2 \varepsilon_k &= -4\pi en i \omega_p \sqrt{\varepsilon_k} \int v dv \int \left\{ -ikv F_k(0) e^{-ikvt} + \right. \\ &\quad \left. + ikv \frac{e}{m} \sqrt{\varepsilon_k} \frac{\partial \bar{F}}{\partial v} \int_0^t e^{i(\omega_p - kv)(t-t')} dt' \right\} + c. c. \end{aligned}$$

Переходим к пределу  $t \rightarrow \infty$ ; тогда первое слагаемое в фигурной скобке исчезает, а второе, в соответствии с формулой

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left( \int_0^t e^{ia(t-t')} dt' + c. c. \right) = 2\pi \delta(a),$$

дает

$$\frac{d\varepsilon_k}{dt} = \varepsilon_k \pi \omega_p^2 \int v \frac{\partial \bar{F}}{\partial v} \delta(\omega_p - kv) dv,$$

т. е. скорость роста энергии отдельной гармоники

$$\frac{d\varepsilon_k}{dt} = 2\gamma_k \varepsilon_k, \quad (8)$$

где

$$\gamma_k = \frac{\pi}{2} \frac{\omega_p^3}{k^2} \int k \frac{\partial \bar{F}}{\partial v} \delta(\omega_p - kv) dv. \quad (8a)$$

Мы видим, таким образом, что в квазилинейной теории скорость роста (или уменьшения) энергии отдельной фурье-гармоники определяется фактически формулой линейной теории, с тем лишь отличием, что место «невозмущенной» функции распределения в формуле линейной теории для инкремента (декремента) занимает «усредненная» функция  $\bar{F}$ .

Второе уравнение квазилинейной теории мы получим, подставляя в уравнение (7а) выражение

$$F_k(t) = F_k(0) e^{-ikvt} - \frac{e}{m} \int_0^t dt' E_k(t') \frac{\partial \bar{F}(t')}{\partial v} e^{-ikv(t-t')}$$

и складывая получившееся уравнение с комплексно-сопряженным:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{F}}{\partial t} = & -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial v} \frac{e}{m} \sum_k E_k^+ \left\{ F_k(0) e^{-ikvt} - \right. \\ & \left. - \frac{e}{m} \int_0^t dt' E_k(t') \frac{\partial \bar{F}(t')}{\partial v} e^{-ikv(t-t')} \right\} + c. c. \end{aligned}$$

Заменяя здесь  $E_k(t)$  на  $\sqrt{\epsilon_k(t)} e^{-i\omega_k t}$ , получим, аналогично предыдущему, следующее уравнение для усредненной функции распределения резонансных частиц  $\bar{F}$ :

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial v} \frac{e^2}{m^2} \sum_k \epsilon_k \pi \delta(\omega_p - kv) \frac{\partial \bar{F}}{\partial v}.$$

Таким образом, второе уравнение имеет вид [4, 14, 15]

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial v_\alpha} D_{\alpha\beta} \frac{\partial \bar{F}}{\partial v_\beta}, \quad (9)$$

где

$$D_{\alpha\beta} = \pi \frac{e^2}{m^2} \sum_k \epsilon_k \delta(\omega_k - kv) \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2}. \quad (9a)$$

Уравнения (8) и (9) представляют собой замкнутую\* систему уравнений квазилинейной теории для спектральной плотности  $\epsilon_k$  и усредненной функции распределения  $\bar{F}(v)$ \*\* . Уравнение (9) имеет вид уравнения диффузии, однако величина коэффициента диффузии  $D$ , пропорциональная, согласно выражению (9а), плотности энергии плазменных колебаний, в свою очередь зависит от функции распределения.

Система квазилинейных уравнений (8)—(9), полученная из уравнений самосогласованного поля (3)—(4), содержит, конечно, меньше информации, чем исходные уравнения (например, можно

\* Зависимость  $\omega_k$  от  $k$ , определяемая грубыми параметрами плазмы, предполагается известной.

\*\* В дальнейшем знак усреднения у функции распределения мы будем опускать.

найти лишь амплитуды  $\sqrt{\epsilon_k}$ , но нельзя найти фаз быстрых осцилляций). Кроме того, область применимости квазилинейной теории значительно уже, чем исходной системы. Однако эти недостатки искупаются сравнительной простотой уравнений квазилинейной теории.

Система квазилинейных уравнений (8)—(9), описывающая взаимодействие резонансных частиц с плазменными колебаниями, обладает, как нетрудно убедиться, интегралом энергии. Действительно, рассмотрим выражение для производной по времени от полной энергии  $Q$  системы резонансных частиц и колебаний. Величина  $Q$  складывается из кинетической энергии резонансных электронов, из энергии электростатического поля плазменных колебаний  $\sum_k \frac{\epsilon_k}{8\pi}$  и из равной ей (по теореме вириала) кинетической энергии всех электронов плазмы, принимающих участие в этих колебаниях. Таким образом

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt} \left( n \int \frac{mv^2}{2} F dv + \sum_k \frac{\epsilon_k}{4\pi} \right).$$

Подставляя в это выражение значения  $\partial F/\partial t$  из уравнения (9) и  $d\epsilon/dt$  из уравнения (8) и интегрируя по частям, получим

$$\frac{dQ}{dt} = 0,$$

т. е. закон сохранения полной энергии системы плазмы — частицы.

Чтобы выяснить физический смысл квазилинейной теории и обобщить полученные уравнения (8)—(9), рассмотрим плазму с сильно возбужденными коллективными степенями свободы как совокупность двух газов: газа частиц (фермионов), который мы будем считать невырожденным, и газа плазмонов (бозонов).

Рассмотрим уравнение баланса числа частиц и волн в фазовом пространстве, предполагая, что система однородна и что выполняются условия  $N_D^{-1} \ll \epsilon/nT \ll 1$  (плотность газа волн значительно превышает термодинамически равновесное значение). Поскольку процессы взаимодействия частица — частица и волна — волна несущественны\*, в первом приближении нужно учитывать лишь процессы взаимодействия частиц с волнами.

Основной процесс, влияние которого мы должны рассмотреть, есть процесс первого порядка — излучение (рис. 1, а) или поглощение (рис. 1, б) плазмона  $q$  частицей  $k$ .

\* Следует помнить, что «волны» в действительности представляют собой коллективные колебания, в которых участвуют все частицы плазмы; «частицы» же, рассматриваемые здесь, — это лишь небольшая группа «резонансных» частиц плазмы, занимающая малый объем скоростного пространства и интенсивно взаимодействующая с «волнами».

Процесс  $a$  есть черенковское излучение плазмона электроном, движущимся в плазме со скоростью  $v$ , превышающей фазовую скорость плазменной волны  $\omega_k/k$ :

$$v = \frac{\omega_k}{k} \frac{1}{\cos \vartheta};$$

обратный процесс  $b$  — есть черенковское поглощение плазмонов частицами.

Матричные элементы этих процессов в рассматриваемом нами случае, когда плотность волн в фазовом пространстве  $N_q$  велика,

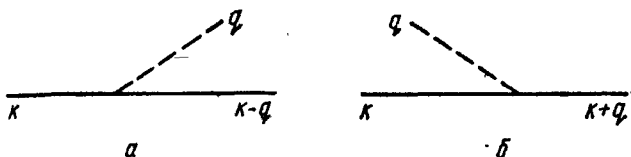


Рис. 1.

пропорциональны  $\sqrt{N_q}$  и, следовательно, вероятность обоих процессов  $W$  одинакова и равна

$$W(k, q) = N_q \omega_{k, k+q} \delta(\varepsilon_i - \varepsilon_f);$$

$$\omega_{k, k+q} = \omega_{k+q, k}.$$

В результате излучения или поглощения волн частица меняет свой импульс и переходит в другую точку фазового пространства.

Изменение числа частиц в точке  $k$  фазового пространства складывается из «членов ухода» вследствие поглощения плазмонов

$$- \sum_q F_k N_q \omega_{k, k+q} \delta(\varepsilon_k + \hbar\omega_q - \varepsilon_{k+q})$$

и излучения плазмонов

$$- \sum_q F_k N_q \omega_{k, k-q} \delta(\varepsilon_k - \hbar\omega_q - \varepsilon_{k-q})$$

и из аналогичных «членов прихода» вследствие поглощения плазмонов

$$+ \sum_q F_{k-q} N_q \omega_{k-q, k} \delta(\varepsilon_{k-q} + \hbar\omega_q - \varepsilon_k)$$

и излучения плазмонов

$$+ \sum_q F_{k+q} N_q \omega_{k+q, k} \delta(\varepsilon_{k+q} - \hbar\omega_q - \varepsilon_k).$$

Здесь  $F_k$  — функция распределения частиц в фазовом пространстве;  $\varepsilon_k$  — кинетическая энергия частицы с волновым вектором  $k$ ;  $\hbar\omega_q$  — энергия волны  $q$ .

Суммируя вклады различных процессов, получим для функции распределения частиц  $F$  уравнение

$$\partial F_k / \partial t = \sum_q N_q (\Psi_{k+q, q} - \Psi_{k, q}), \quad (96)$$

где

$$\Psi_{k, q} = (F_k - F_{k-q}) \omega_{k, k-q} \delta(\epsilon_k - \epsilon_{k-q} - \hbar \omega_q).$$

Аналогичным образом можно найти и уравнение для распределения волн  $N_q$ . Изменение  $N_q$  происходит в результате тех же процессов испускания и поглощения плазмонов частицами, так что в рассматриваемом пространственно-однородном случае

$$\partial N_q / \partial t = N_q \sum_k \Psi_{k+q, q}^*. \quad (86)$$

Чтобы из уравнений (86)—(96)\* получить, например, выведенные ранее уравнения для разреженной плазмы (8)—(9), достаточно учесть то обстоятельство, что относительное изменение импульса частицы при рождении (поглощении) волны в разреженной плазме весьма мало ( $q/k \rightarrow 0$ ), и воспользоваться следующими формулами для вероятности  $\omega$  и числа квантов ленгмюровских колебаний  $N_q$ :

$$\omega_{k, k-q} = 4\pi^2 e^2 \omega_0 / q^2; \quad N_q = |E_q^2| / 4\pi \hbar \omega_0$$

(здесь  $\omega_0$  — плазменная частота). При этом уравнение (96) совпадает с уравнением (9), а уравнение (86) переходит в формулу для инкремента (8).

Заметим, что практически кинетическое уравнение для функции распределения плазмонов (или спектральной плотности шумов) проще получать, решая линейризованное кинетическое уравнение с самосогласованным полем и находя из него декремент (инкремент)  $\gamma$ ; при этом  $\gamma$  является функционалом усредненной функции резонансных частиц  $F$ , на фоне которой и ищутся малые колебания. Таким образом, вместо уравнения (86) имеем:

$$\frac{1}{|E_k^2|} \frac{d|E_k^2|}{dt} = 2\gamma \{F\}. \quad (8в)$$

Уравнения (86) и (96) описывают взаимодействие плазмонов с частицами в слаботурбулентной плазме.

**Задача 1.** Вывести уравнения (86)—(96) из уравнений для матрицы плотности плазмы [20].

**Решение.** Как и в случае классической плазмы, будем исходить из уравнений с самосогласованным полем  $\Phi$ ; при этом для матрицы плотности в представлении Вигнера

$$f_{xp} = \sum_{\xi} e^{-i\xi p} \rho \left( x - \frac{\xi}{2}, x + \frac{\xi}{2} \right),$$

\* Уравнения (86)—(96) можно вывести из уравнения для матрицы плотности плазмы (см. задачу 1).

где  $Q(y, z)$  удовлетворяет уравнению \*

$$i\partial Q(y, z)/\partial t = [-\Delta_y/2 + \Delta_z/2 + e\varphi(y) - e\varphi(z)] Q(y, z) = \\ = \left[ \nabla_x \nabla_\xi + e\varphi\left(x + \frac{\xi}{2}\right) - e\varphi\left(x - \frac{\xi}{2}\right) \right] Q\left(x + \frac{\xi}{2}, x - \frac{\xi}{2}\right),$$

имеем:

$$\frac{\partial f_{xp}}{\partial t} = \frac{1}{i} \sum_{\xi} e^{-i\xi p} \left[ \nabla_x \nabla_\xi + e\varphi\left(x + \frac{\xi}{2}\right) - e\varphi\left(x - \frac{\xi}{2}\right) \right] \sum_q e^{i\xi q} f_{xq} = \\ = -p \frac{\partial f_{xp}}{\partial x} + \frac{1}{i} \sum_{\xi q} \left[ e\varphi\left(x + \frac{\xi}{2}\right) - e\varphi\left(x - \frac{\xi}{2}\right) \right] e^{i\xi(q-p)} f_{xq}. \quad (A)$$

Уравнение (A) вместе с уравнением Пуассона \*\*

$$\Delta_x \Phi = 4\pi n e \left( \sum_p f_{xp} - 1 \right) \quad (B)$$

в квазилинейной теории плазмы заменяются системой уравнений для среднего значения квантовой функции распределения  $f_p^0 = \langle f_{xp} \rangle$  и для осциллирующего во времени отклонения функции распределения  $f_{xp}$  от ее среднего значения (это отклонение предполагается малым).

Выделяя в уравнениях (A) и (B) осциллирующие члены и переходя к пространственным фурье-компонентам

$$\Phi(x) = \sum_k \Phi_k e^{ikx}; \quad f_{xp} = \langle f_{xp} \rangle + \sum_k f_{kp}^1 e^{ikx},$$

получаем для пространственно-однородного случая ( $\nabla_x f^0 = 0$ )

$$i f_{kp}^1 + ikp f_{kp}^1 = e\Phi_k \frac{f_{p+\frac{k}{2}}^0 - f_{p-\frac{k}{2}}^0}{i}; \quad \Phi_k = -4\pi n e k^2 \sum_p f_{kp}^1. \quad (B)$$

С другой стороны, проводя усреднение по  $x$  в уравнении (A), имеем:

$$\frac{\partial f_p^0}{\partial t} = i \sum_k e\Phi_k^+ \left[ f_{k, p+\frac{k}{2}}^1 - f_{k, p-\frac{k}{2}}^1 \right]. \quad (Г)$$

Подставляя решение обыкновенного дифференциального уравнения (B) в равенство (Г) и вводя обозначения

$$\omega_{p, p'} = 4\pi^2 e^2 \frac{\omega_{p-p'}}{|p-p'|^2}, \quad N_k = \frac{k^2 |\Phi_k^2|}{4\pi \omega_k}, \quad F_p = f_p^0,$$

получаем:

$$\frac{\partial F_p}{\partial t} = \sum_k \omega_{p, p+k} N_k \left\{ (F_{p-k} - F_p) \delta\left(\omega_k - k\left(p + \frac{k}{2}\right)\right) - \right. \\ \left. - (F_p - F_{p-k}) \delta\left(\omega_k - k\left(p - \frac{k}{2}\right)\right) \right\}.$$

\* Мы полагаем  $\hbar = m = 1$  и для простоты рассматриваем ниже квадратичный изотропный спектр  $\epsilon_p = p^2/2$ .

\*\* Для простоты рассматривается случай продольных колебаний электронной плазмы с положительным «фоном» пространственного заряда.

Аналогично для изменения  $N_k$  имеем:

$$\partial N_k / \partial t = N_k \sum_p \omega_{p+\frac{k}{2}, p-\frac{k}{2}} \left( F_{p+\frac{k}{2}} - F_{p-\frac{k}{2}} \delta(\omega_k - kp) \right).$$

### Релаксация плазменных колебаний

Рассмотрим в рамках квазилинейной теории задачу о затухании плазменных колебаний. Линейная теория предсказывает экспоненциальное затухание колебаний за время порядка  $1/\gamma$ . При этом декремент затухания  $\gamma$  определяется в линейной теории термодинамически равновесной (максвелловской) функцией распределения, поскольку предполагается, что к моменту создания колебаний плазма находилась в состоянии термодинамического равновесия. Так, созданное в плазме бесконечно малое возмущение, согласно линейной теории, постепенно затухает, и система возвращается к термодинамически равновесному состоянию.

Если, однако, энергия созданных в начальный момент плазменных колебаний значительно превышает энергию тепловых шумов в равновесной плазме, то процесс затухания колебаний протекает иначе. До тех пор, пока плотность энергии волн  $\epsilon$  много больше плотности энергии тепловых шумов  $nT/H_D$ , столкновения между частицами плазмы не играют заметной роли и происходит процесс диффузии на волнах и выравнивание функции распределения в той области пространства скоростей, где имеются частицы с резонансным значением скорости. В результате такого выравнивания частицы переходят из области меньших значений скоростей в область больших и одновременно с затуханием плазменных колебаний кинетическая энергия частиц увеличивается (величина  $\gamma$  отрицательная), а полная энергия системы волны — частицы сохраняется. Такой процесс квазилинейного поглощения заканчивается, когда  $\gamma$  обращается в нуль. При этом энергия плазменных колебаний остается, вообще говоря, конечной и значительно превышает уровень тепловых шумов. После этого колебания больше не затухают, поскольку декремент  $\gamma = 0$ , и функция распределения не меняется. В дальнейшем под влиянием столкновений между частицами происходит медленная диффузия в пространстве скоростей, приводящая в конце концов к установлению термодинамически равновесного максвелловского распределения и затуханию колебаний до уровня тепловых шумов; эта вторая стадия длится по времени значительно больше, чем первая. Здесь мы исследуем лишь первый этап процесса — квазилинейную релаксацию колебаний.

Рассмотрим простейший случай электронных ленгмюровских колебаний. Предположим, что в начальный момент времени  $t = 0$  в термодинамически равновесной плазме (функция распределения электронов по скоростям — максвелловская) равномерно во всем пространстве в некотором интервале волновых векторов  $k$  созданы



плазменные колебания со спектральной плотностью энергии  $\varepsilon_k(0)$ , значительно превышающей энергию теплового шума. Будем считать, что все векторы  $k$  параллельны друг другу, т. е. рассмотрим задачу с одномерным спектром колебаний. В этом случае уравнения существенно упрощаются и можно написать аналитическое решение задачи. При одномерном спектре и достаточно длинных волнах скорость резонансных частиц однозначно связана с волновым вектором простым соотношением

$$v = \omega_0/k, \quad (10)$$

где  $\omega_0$  — ленгмюровская частота. Коэффициент диффузии на волнах в рассматриваемом случае

$$D(v) = \frac{e^2}{2m^2} \frac{|E_k^2|}{v}, \quad (11)$$

а декремент определяется выражением

$$\gamma = \frac{\pi}{2} \frac{\omega_0^3}{k^2} \frac{\partial f}{\partial v}, \quad (12)$$

где  $f$  — нормированная на единицу ( $\int f dv = 1$ ) усредненная функция распределения электронов плазмы по компоненту скорости вдоль выделенного направления волнового вектора  $k$ .

Система уравнений квазилинейной теории принимает, таким образом, вид

$$\partial \varepsilon / \partial t = A \varepsilon \partial f / \partial v; \quad (13)$$

$$\partial f / \partial t = \frac{\partial}{\partial v} \left( B \varepsilon \frac{\partial f}{\partial v} \right), \quad (14)$$

где  $\varepsilon = E_k^2/8\pi$  и  $f$  — функции времени  $t$  и скорости  $v = \omega_c/k$ , а коэффициенты  $A$  и  $B$  зависят лишь от скорости, но не зависят от времени:

$$A = \pi \omega_0^2 v^2; \quad B = \omega_0^2 / n m v. \quad (14a)$$

Начальные условия для системы уравнений (13)—(14) таковы: при  $t = 0$  величина  $\varepsilon = \varepsilon_0(0, v)$ ;  $f = f_M(v)$ ; здесь спектральная плотность  $\varepsilon_0(0, v)$  отлична от нуля в конечном интервале скоростей  $v_1 < v < v_2$ , а  $f_M$  — максвелловская функция распределения.

Под действием диффузии на волнах в области  $v_1 < v < v_2$  отрицательная производная функции распределения увеличивается, т. е. функция распределения становится более пологой. В то же время происходит затухание волн, и коэффициент диффузии падает. Если начальная спектральная плотность шумов  $\varepsilon(0, v)$  достаточно велика, то в результате процесса релаксации значение  $\partial f / \partial v$  обратится в нуль, а плотность шумов  $\varepsilon(\infty, v)$

останется конечной. При этом система перейдет в состояние, в котором  $\frac{\partial f}{\partial v} = 0$  в интервале  $v_1 < v < v_2$  и  $f = f_M$  вне этого интервала скоростей. Коэффициент диффузии  $D$  (и плотность энергии плазменных колебаний) будет отличаться от нуля в области  $v_1 < v < v_2$  и останется равным нулю вне этой области. Такое состояние с плато на функции распределения согласно квазилинейной теории должно быть стационарным, поскольку уравнения (13)—(14) удовлетворяются при этом во всем пространстве скоростей. В действительности же процессы столкновений между частицами, которые не были учтены в уравнениях (13)—(14), приведут, как уже было указано, к медленной диффузии частиц в пространстве скоростей и постепенному установлению термодинамического равновесия. Таким образом, описанное распределение с плато является квазистационарным. Если, однако, мы не рассматриваем этих медленных процессов, то можно говорить о стационарном конечном состоянии.

Уравнения квазилинейной теории (13)—(14) дают возможность связать спектральную плотность энергии плазменных колебаний  $\epsilon(\infty, v)$  в стационарном состоянии с начальной спектральной плотностью  $\epsilon(0, v)$ . Действительно, подставляя  $\epsilon \frac{df}{dv} = A^{-1} \frac{\partial \epsilon}{\partial t}$  из уравнения (13) в уравнение (14), мы убеждаемся, что в процессе релаксации сохраняется величина  $f - \frac{\partial}{\partial v} BA^{-1}\epsilon$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ f - \frac{\partial}{\partial v} BA^{-1}\epsilon \right\} = 0. \quad (15)$$

Поэтому в любой момент времени

$$f - \frac{\partial}{\partial v} BA^{-1}\epsilon = f_M - \frac{\partial}{\partial v} BA^{-1}\epsilon_0.$$

В частности, в конечном состоянии (при  $t \rightarrow \infty$ )

$$f_\infty - \frac{\partial}{\partial v} BA^{-1}\epsilon_\infty = f_M - \frac{\partial}{\partial v} BA^{-1}\epsilon_0,$$

так что

$$\epsilon(\infty, v) = \epsilon(0, v) - AB^{-1} \int_{v_1}^v (f_M - f_\infty) dv. \quad (16)$$

Поскольку высота плато  $f_\infty$  — известная постоянная величина (она определяется законом сохранения полного числа резонансных частиц \*  $\int_{v_1}^{v_2} (f_M - f_\infty) dv = 0$ , т. е.  $f_\infty = (v_2 - v_1)^{-1} \times$

\* Этот закон вытекает из закона сохранения полного числа частиц; поскольку функция распределения  $f(v)$  при  $v < v_1$  и  $v > v_2$  не меняется, то полное число резонансных частиц ( $v_1 < v < v_2$ ) должно сохраняться.

$\times \int_{v_1}^{v_2} f_M dv$ ), то соотношение (16) определяет спектральную плотность энергии колебаний в конечном стационарном состоянии.

Уменьшение энергии колебаний в результате процесса квазилинейной релаксации компенсируется возрастанием кинетической энергии частиц, переходящих в процессе диффузии в фазовом пространстве в область больших скоростей. Действительно, из соотношения (16) следует, что

$$2 \int_{\omega/v_2}^{\omega/v_1} \{\varepsilon(0, v) - \varepsilon(\infty, v)\} \frac{dk}{2\pi} = \\ = \int_{v_1}^{v_2} dv' n m v' \int_{v_1}^{v'} (f_M - f_\infty) dv. \quad (17)$$

Интегрируя правую часть этого равенства по частям, получим закон сохранения энергии

$$2 \int [\varepsilon(0, v) - \varepsilon(\infty, v)] \frac{dk}{2\pi} = \int_{v_1}^{v_2} n \frac{mv^2}{2} (f_M - f_\infty) dv. \quad (18)$$

Может оказаться, что начальной энергии волн не хватит для установления плато на электронном распределении (соотношение (16) приведет при этом к бессмысленному отрицательному выражению для  $\varepsilon_\infty$ ). В таком случае стационарное состояние не будет достигнуто и система придет к термодинамически равновесному состоянию за время порядка среднего времени между парными соударениями частиц.

До сих пор мы рассматривали разреженную плазму без учета столкновений частиц. Вообще говоря, влияние столкновений на движение частиц сравнивается с влиянием волн только в том случае, когда волна равновесная, т. е. когда ее амплитуда не превышает амплитуды соответствующей гармоники в спектре тепловых шумов плазмы. Только для теплового шума сравниваются такие процессы, как черенковское излучение волн движущейся частицей, излучение при столкновениях, затухание волн, исследованное Ландау, поглощение при столкновениях. Уровень теплового шума колебаний плазмы как раз и определяется балансом этих процессов.

Однако и для колебаний большой амплитуды («надтепловых») столкновения частиц могут определять ряд процессов и прежде всего процесс резонансного поглощения.

Под действием волны происходит сильное искажение функции распределения в области резонансных частиц. В результате же столкновений частично восстанавливается максвелловская функция распределения и устанавливается стационарное поглощение волн. Все прочие эффекты от столкновений по-прежнему малы.

Формально уравнение, описывающее поведение усредненной функции распределения во времени, получается как первый член в разложении точного кинетического уравнения по  $1/N_D$  (по отношению энергии тепловых шумов к тепловой энергии плазмы):

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial}{\partial v} D \frac{\partial f}{\partial v} + Sf, \quad (19)$$

где последний член описывает парные столкновения резонансных частиц с прочими частицами плазмы.

Существуют различные формы записи члена столкновений для плазмы. Можно записать, например, этот член в форме, предложенной Ландау [3, 6], и линеаризовать его, так как резонансных частиц мало:

$$Sf = L \frac{\partial}{\partial v_i} v^{-3} \left[ v_i f + \left( v^2 \delta_{ik} - v_i v_k - \frac{T}{m} \frac{v^2 \delta_{ik} - 3v_i v_k}{v^2} \right) \frac{\partial f}{\partial v_k} \right],$$

где  $L = \frac{\lambda \omega_0^4}{n}$  (здесь  $\lambda$  — «кулоновский логарифм»).

Если мы, интересуясь распределением частиц лишь по одному компоненту скорости  $v_{\parallel}$ , проинтегрируем член столкновений по остальным компонентам, то в результате получим

$$\int Sf dv_{\perp} = \frac{\partial}{\partial v_{\parallel}} v \left( v_{\parallel} f + \frac{T}{m} \frac{\partial f}{\partial v_{\parallel}} \right), \quad (19a)$$

где  $T$  — температура электронов, а  $v \approx \frac{\lambda \omega_0^4}{nv_{\parallel}^3}$  — частота столкновений.

Парные столкновения между частицами приводят к постепенному исчезновению плато на функции распределения и переходу системы в термодинамически равновесное состояние. Характерное время процесса приближения системы к максвелловскому распределению можно оценить следующим образом. Уравнение квазилинейной теории для функции распределения с учетом диффузии, обусловленной испусканием и поглощением волн и парными столкновениями, имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial v_{\parallel}} D \frac{\partial f}{\partial v_{\parallel}} + \frac{\partial}{\partial v_{\parallel}} v \left( v_{\parallel} f + \frac{T}{m} \frac{\partial f}{\partial v_{\parallel}} \right). \quad (20)$$

Интегрируя уравнение (20) по времени и учитывая, что  $D \frac{\partial f}{\partial v} = A^{-1} \frac{\partial D}{\partial t}$ , где  $A$  дается формулой (14a), получим (индекс у  $v_{\parallel}$  в дальнейшем опускается)

$$\left( f - \frac{\partial}{\partial v} A^{-1} D - \frac{\partial}{\partial v} v \frac{T}{m} A^{-1} \ln D \right) \Big|_0^t = \frac{\partial}{\partial v} \int_0^t dt v f. \quad (20a)$$

Если мы рассматриваем случай, когда изменение функций распределения  $f_0 - f_M$  значительно меньше, чем  $\partial D_0 A^{-1} / \partial v$ , то первым слагаемым в левой части можно пренебречь. Тогда, интегрируя уравнение (20а), по  $v$  от  $-\infty$  до  $v$ , воспользуемся тем обстоятельством, что в процессе затухания функция распределения  $f$  меняется незначительно (чего нельзя, конечно, сказать о ее производной  $\partial f / \partial v$ ), и заменим  $f$  под знаком интеграла в правой части уравнения (20а) на термодинамически равновесную функцию  $f_M = (2\pi T/m)^{-1/2} \exp -\frac{mv^2}{2T}$ . При этом получим следующее трансцендентное уравнение для  $D(t, v)$ , определяющее зависимость коэффициента диффузии  $D$  (или энергии волн  $\epsilon = B^{-1}D$ ) от времени:

$$\left( -\frac{m}{T\nu} D - \ln D \right) \Big|_0^t = -A \frac{\partial f_M}{\partial v} t.$$

Из этого уравнения видно, что в начальной стадии шумы затухают по линейному закону  $D_0 - D \sim t$ , а экспоненциальное затухание  $\ln \frac{D_0}{D} \sim t$  возникает лишь в последней стадии процесса, когда уровень шумов станет достаточно малым.

Следовательно, обратное влияние волн на частицы, учитываемое квазилинейной теорией, приводит к резкому уменьшению поглощения: резонансные частицы перераспределяются, и на функции распределения образуется плато; столкновения же постепенно сглаживают края плато и устанавливают стационарное состояние, в котором

$$\frac{\partial f}{\partial v} = -\frac{\nu f}{\nu \frac{T}{m} + D}.$$

Поскольку в результате обратного действия волны изменяется в основном не сама функция распределения, а ее производная, то

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{1}{1 + D \frac{m}{T\nu}} \frac{\partial f_M}{\partial v} = \frac{1}{1 + \lambda \frac{\bar{k}}{\Delta k} \left( \frac{\nu}{v_T} \right)^3 \frac{\epsilon}{nT/N_D}} \frac{\partial f_M}{\partial v}, \quad (21)$$

где  $\bar{k}$  — среднее волновое число пакета;  $\Delta k$  — его полуширина;  $v_T = \sqrt{T/m}$ ;  $\lambda \approx 1$ .

Из уравнений (13) и (21) находим

$$\frac{\partial D}{\partial t} = D \frac{1}{1 + D \frac{m}{T\nu}} \frac{\partial f_M}{\partial v}.$$

Интегрируя это обыкновенное дифференциальное уравнение для  $D(t)$  (скорость  $v$  входит как параметр), мы снова приходим к формуле (20б).

Подставляя уравнение (21) в уравнение (8), получим (рис. 2)

$$2\gamma = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{1}{1 + \lambda \frac{\bar{k}}{\Delta k} \left(\frac{v}{v_T}\right)^3 \frac{\varepsilon}{nT/N_D}} 2\gamma_0. \quad (22)$$

При  $\varepsilon \ll nT/N_D'$  (здесь  $N_D'$  — число частиц в сфере радиуса  $v/\omega$ ) величина  $\gamma \rightarrow \gamma_0$ , где  $\gamma_0$  получается из линейной теории. При  $\frac{\varepsilon}{nT} \approx 1$  величина  $\gamma \approx \frac{\gamma_0}{N_D} \approx v$ . Таким образом, эффективное время затухания пакета меняется от времени порядка  $1/\gamma_0$

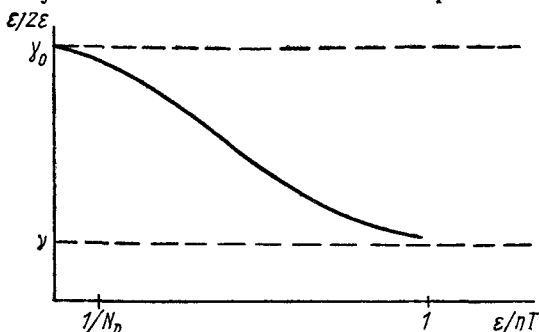


Рис. 2.

для волны, не превышающей уровня теплового шума, до времени порядка времени столкновения для волны большой амплитуды.

Фактор, уменьшающий величину производной  $\partial f/\partial v$  вследствие искажения функции распределения, может быть записан в виде

$$\frac{1}{1 + D \frac{m}{T\nu}} = \frac{1}{1 + \frac{e^2}{mT\nu k} \frac{E_k^2 \Delta k}{\Delta v}}$$

и, следовательно, в случае «монокроматической» волны (где  $\Delta v \approx \sqrt{e\varphi_0/m}$ ;  $E_k^2 \Delta k = E^2$ ) равен

$$\frac{1}{1 + \frac{A'e^2}{mT\nu k} \frac{E^2}{\sqrt{e\varphi_0/m}}} = \frac{1}{1 + A \frac{(e\varphi_0)^{3/2}}{\sqrt{m} T\nu \lambda}}, \quad (23)$$

где  $A$  и  $A'$  равны  $\approx 1$ .

Рассмотрим теперь задачу о прохождении через слой плазмы ленгмюровских волн, непрерывно создаваемых генератором на границе слоя\*.

\* Следует отметить, что в рамках квазилинейной теории можно рассматривать лишь задачу о прохождении волнового пакета достаточной ширины, так чтобы выполнялось условие  $\Delta(\omega/k) > \sqrt{e\varphi/m}$ , где  $\varphi$  — средняя амплитуда потенциала в волнах.

Линейная теория малых колебаний разреженной плазмы предсказывает наличие бесстолкновительного затухания волн, распространяющихся в плазме. Проявлением такого бесстолкновительного затухания, в частности, является уменьшение амплитуды продольных ленгмюровских волн, возбуждаемых на границе плазмы внешним электрическим полем с частотой  $\omega > \omega_0$  и распространяющихся в глубь плазмы перпендикулярно границе. Для длинноволновых колебаний, которые мы только и будем рассматривать, падение амплитуды волны по мере прохождения в глубь плазмы дается выражением [1] \*

$$\varepsilon_k^{-1} \frac{\partial \varepsilon_k}{\partial x} = \frac{\pi}{3} \frac{\omega_0^4}{k^3} \frac{m}{T} \frac{\partial f}{\partial v}, \quad (24)$$

где  $k = \frac{\omega}{v}$  — волновой вектор;  $\omega^2 = \omega_0^2 + 3 \frac{T}{m} k^2$ ;  $f$  — функция распределения электронов по компоненту скорости, параллельному направлению распространения волн и перпендикулярному к границе. Таким образом, линейная теория, где энергия пакета волн считается бесконечно малой, приводит к выводу об экспоненциальном законе затухания энергии пакета в зависимости от расстояния. Декремент затухания определяется выражением (24) при

$$f = f_M(v) = (2\pi T/m)^{-1/2} \exp -mv^2/2T.$$

В действительности же энергия волн конечна, и под влиянием диффузии на этих волнах происходит выравнивание функции распределения резонансных электронов и уменьшение затухания. Если бы мы, учитывая то обстоятельство, что параметр  $N_D \varepsilon / nT$  (где  $\varepsilon$  — плотность энергии волн) значительно превышает единицу, вообще пренебрегли столкновениями, то из уравнений квазилинейной теории следовало бы, что на некотором расстоянии от границы волны создают на функции распределения плато

$$v \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial v} D \frac{\partial f}{\partial v} = 0; \quad D \neq 0$$

и дальше распространяются без затухания:

$$f(v, x) = \text{const}; \quad \frac{\partial \varepsilon_k}{\partial x} = 0.$$

Таким образом, чтобы получить конечное поглощение, мы должны учесть член столкновений в уравнении для функции распределения частиц

$$v \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial v} D \frac{\partial f}{\partial v} + Sf. \quad (25)$$

\* Это выражение (справедливое лишь при удалении от границы плазмы на расстояние в несколько длин волн) следует из уравнения (8б), если учесть, что в рассматриваемом случае

$$\partial N_q / \partial t \rightarrow [H_q, N_q] = 3 \frac{q}{\omega} \frac{T}{m} \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Уравнения (24) и (25) с начальными условиями  $\varepsilon(0, v) = \varepsilon_0(v)$ ,  $f(0, v) = f_0(v)$  полностью определяют закон изменения спектральной плотности энергии волн и функции распределения в зависимости от расстояния. Для упрощения расчета мы, однако, ограничимся случаем достаточно сильных волн, требуя выполнения неравенства

$$\frac{\varepsilon}{nT} \gg \frac{1}{\sqrt{N_D}}.$$

Как показывает оценка, в этом случае можно пренебречь членом  $v \partial f / \partial x$  в уравнении (25). При этом

$$\frac{\partial f}{\partial v} = -v \frac{v f}{D}, \quad (26)$$

поскольку в интересующей нас области скоростей величина  $\frac{T}{m} \frac{\partial f}{\partial v}$  пренебрежимо мала по сравнению с  $v f$ . Если ширина пакета плазменных волн не очень велика, то функция распределения изменяется под их действием незначительно (чего нельзя, конечно, сказать о производной функции распределения: она меняется очень существенно) и в правой части уравнения (26) можно заменить  $f$  на максвелловскую функцию  $f_M$ . Подставляя затем найденное значение  $\partial f / \partial v$  в уравнение (24), находим:

$$\frac{\partial \varepsilon_k}{\partial x} = -\frac{\pi}{3} \frac{v}{k} \frac{v^2}{T/m} n m v^2 f_M,$$

так что энергия волнового пакета по мере удаления от границы падает линейно:

$$\frac{\varepsilon_k(x)}{\varepsilon_k(0)} = 1 - \frac{x}{L},$$

а характерная длина затухания  $L$  прямо пропорциональна энергии волн на границе и по порядку величины

$$L \approx \frac{1}{k} \frac{\varepsilon N_D}{nT} \quad (\text{при } v \approx v_T).$$

Таким образом,  $L$  значительно превышает ту длину затухания  $L_{\text{лин}}$ , которая дается линейной теорией. Для длин волн порядка дебаевского радиуса  $\frac{L}{L_{\text{лин}}} \approx \frac{\varepsilon N_D}{nT}$ .

В задаче о затухании волн, распространяющихся в анизотропной плазме, формула для квазилинейного декремента затухания усложняется, однако, ее структура остается такой же, как и в уравнениях (22)—(23):

$$\gamma = \frac{\gamma_0}{1 + \frac{v'}{v_e}};$$

здесь  $v_e$  — частота столкновений электронов, а  $v'$  — обратное время квазилинейного образования плато.



## Развитие возмущений в неустойчивой плазме

Рассмотрим в рамках квазилинейной теории задачу о развитии возмущений в неустойчивой разреженной плазме. Исследуем прежде всего динамику системы, неустойчивой относительно раскачки электронных ленгмюровских колебаний. Для упрощения задачи ограничимся случаем, когда волновые векторы колебаний, нарастающих в неустойчивой плазме, параллельны один другому и спектр волн является одномерным\*. Предположим, что функция распределения электронов плазмы  $f(0, v)$  в начальный момент времени такова, что в некотором небольшом интервале скоростей (когда средняя скорость этого интервала значительно превышает среднюю тепловую скорость электронов плазмы) она возрастает, и величина  $df/dv$  в этом интервале положительна. В таком случае состояние плазмы неустойчиво и спектральная плотность энергии  $\epsilon_k$  в соответствующем интервале волновых чисел  $k = \frac{\omega_0}{v}$  начинает расти в соответствии с уравнением

$$\frac{\partial \epsilon_k}{\partial t} = 2\gamma \epsilon_k; \quad \gamma = \frac{\pi}{2} \frac{\omega_0^3}{k^2} \frac{\partial f}{\partial v}. \quad (27)$$

Рост колебаний приводит к увеличению коэффициента диффузии резонансных частиц на волнах

$$D = \frac{e^2}{2m^2} \frac{|E_k^2|}{v}. \quad (28)$$

Одновременно происходит сглаживание функции распределения и расширение области неустойчивости:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial v} D \frac{\partial f}{\partial v}. \quad (29)$$

Рост колебаний и диффузия резонансных электронов происходят до тех пор, пока на функции распределения не образуется плато, т. е. область, где  $\frac{\partial f}{\partial v} = 0$ . После этого колебания больше не нарастают и устанавливается стационарное состояние. Электронное распределение в конечном состоянии  $f_\infty(v)$  можно найти из условия сохранения полного числа резонансных частиц, продиффундировавших в фазовом пространстве в процессе установления стационарного состояния в область меньших скоростей:

$$\int_{v_1}^{v_2} f(0, v) dv = \int_{v_1}^{v_2} f(\infty, v) dv. \quad (30)$$

\* Такой случай реализуется, когда в плазме имеется выделенное направление (внешнее магнитное поле, ось трубки, заполненной плазмой, и т. д.) и инкремент колебаний с волновым вектором, параллельным этому направлению, максимален.

Значения скоростей  $v_{1,2}$  определяют границы области плато и должны находиться одновременно с  $f(\infty, v)$  путем совместного решения уравнения (30) и равенств

$$f(0, v_1) = f(0, v_2) = f(\infty); \quad (31)$$

это означает, что площади под кривыми  $f(0, v)$  и  $f(\infty, v)$  (рис. 3) должны быть равны; точки  $v_{1,2}$  обозначены на этом рисунке.

Система уравнения (30)—(31) однозначно определяет значение  $f(\infty, v)$  в области плато и границы этой области  $v_{1,2}$ ; в области же вне плато  $f(\infty, v) = f(0, v)$ .

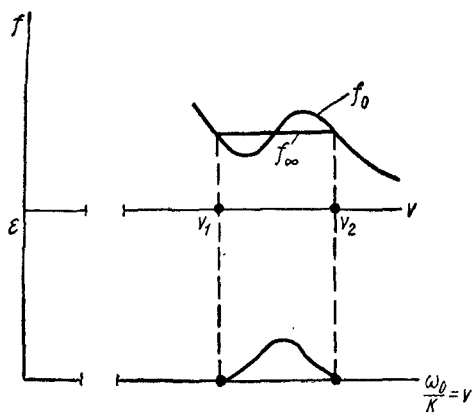


Рис. 3.

Спектральная плотность шумов в конечном состоянии  $\varepsilon_\infty$  связана (как и в случае квазилинейной релаксации ленгмюровских колебаний, рассмотренном в предыдущем разделе) с начальной спектральной плотностью  $\varepsilon_0$  и изменением функции распределения  $f(0, v) - f(\infty, v)$  соотношением

$$\begin{aligned} \varepsilon(\infty, v) - \varepsilon(0, v) = \\ = -AB^{-1} \int_{v_1}^v (f_0 - f_\infty) dv, \end{aligned} \quad (32)$$

где функций  $A$  и  $B$  определяются равенствами (14а). Если уровень шумов в системе в начальный момент времени был тепловым, то мы можем пренебречь величиной  $\varepsilon(0, v)$ , так что спектр ленгмюровских колебаний в конечном состоянии будет определяться одним лишь начальным распределением электронов вблизи области возрастания  $f_0$  [14, 18]:

$$\varepsilon(v, \infty) = AB^{-1} \int_{v_1}^v (f_\infty - f_0) dv. \quad (33)$$

Плотность энергии колебаний, устанавливающихся по окончании процесса диффузии, по порядку величины равна

$$\frac{E^2(\infty)}{8\pi} \approx \delta n (mv_2^2 - mv_1^2),$$

где  $v_{1,2}$  — границы плато, а  $\delta n$  — плотность той части электронов, которые переходят в область меньших энергий в пространстве скоростей.

Длительность  $\tau$  рассмотренного процесса возбуждения колебаний и релаксации электронного распределения, приводящего к установлению плато, можно оценить как время диффузии в про-

странстве скоростей, воспользовавшись выражением для коэффициента диффузии  $D_\infty$  в конечном состоянии:

$$\tau \approx \frac{(v_2 - v_1)^2}{D_\infty} \approx \frac{1}{\omega_0} \frac{(v_2 - v_1)^2}{v^2} \frac{n}{\delta n},$$

где  $v$  — среднее значение скорости в области плато.

В результате процесса развития неустойчивости кинетическая энергия резонансных частиц переходит в энергию электрического поля ленгмюровских колебаний и в кинетическую энергию всех электронов плазмы, участвующих в этих коллективных колебаниях; в целом, конечно, энергия плазмы сохраняется.

### Взаимодействие пучка с плазмой

Известно, что система, состоящая из плазмы и проходящего через нее потока заряженных частиц (пучка), при определенных условиях становится неустойчивой. Исследованию этой, так называемой электростатической неустойчивости, посвящен ряд экспериментальных и теоретических работ. Согласно линейной теории [4], электростатическая неустойчивость имеет несколько различный характер в двух предельных случаях. Когда пучок плотный, почти моноэнергетический и движется относительно плазмы с большой скоростью, в плазме возникают нарастающие колебания, частота и инкремент которых определяются параметрами всей системы. Если же скорость и плотность пучка не очень велики, а разброс скоростей в нем не слишком мал, частота колебаний равна ленгмюровской частоте плазмы и лишь их инкремент определяется свойствами всей системы — он пропорционален производной по скорости полной функции распределения электронов плазмы и пучка (в точке  $v = \frac{\omega}{k}$ ).

Изложенная выше квазилинейная теория пригодна для исследования динамики взаимодействия пучка с плазмой лишь во втором случае.

При анализе взаимодействия пучка с плазмой мы ограничимся, как и в предыдущих разделах, рассмотрением одномерных электронных ленгмюровских колебаний. Пусть пучок движется сквозь плазму в положительном направлении оси  $x$ ; в точке  $x = 0$  заданы функции распределения электронов плазмы и пучка и спектральная плотность шумов  $\epsilon_k = |E_k^2|/8\pi$ . Если для частиц, находящихся в резонансе ( $v = \frac{\omega}{k}$ ) с плазменными волнами, выполнено условие  $\frac{\partial f}{\partial v} > 0$ , волны начинают нарастать. Одновременно происходит процесс диффузии электронов пучка и плазмы в пространстве скоростей, сглаживающий функцию распределения в области, где отличен от нуля коэффициент диффузии на волнах, и приводящий к уменьшению инкремента. По мере движения пучка производная функция распределения по скорости падает,

а энергия волн растёт. При  $x \rightarrow \infty$  система переходит в описанное выше стационарное состояние, в котором на функции распределения электронов системы плазма — пучок имеется плато, а в соответствующей области волновых векторов — незатухающие плазменные колебания. Поскольку плотность энергии этих колебаний больше, чем на входе в систему (при  $x = 0$ ), очевидно, что кинетическая энергия электронов пучка уменьшилась. Действительно, в результате образования плато на функции распределения электронов группа частиц переместилась ближе к началу координат пространства скоростей, что и привело к уменьшению кинетической энергии пучка — к его торможению. Квазилинейная теория позволяет найти эту потерю энергии пучком и определить форму спектра плазменных колебаний, возникающих в системе.

Уравнения квазилинейной теории в рассматриваемом случае имеют вид\*

$$\left. \begin{aligned} v_g \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} &= A \varepsilon \frac{\partial f}{\partial v}; \\ v \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial v} B \varepsilon \frac{\partial f}{\partial v}, \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

где  $v_g$  — групповая скорость плазменных волн, а значения независимых от координаты  $x$  коэффициентов  $A$  и  $B$  даются равенствами (14а). Система уравнений (34) должна решаться при следующих граничных условиях:  $f(0, v) = f_0(v)$ ;  $\varepsilon(0, v) = \varepsilon_0(v)$ . Можно считать, что волновой вектор и скорость резонансной частицы связаны между собой соотношением  $\omega = kv$ ; здесь  $\omega = \omega_0 + \frac{3}{2} k^2 \frac{T}{m\omega_0}$ , где  $\omega_0$  — электронная плазменная частота,  $T$  — электронная температура.

Уровень плато, образовавшегося на функции распределения, можно определить из условия сохранения полного числа резонансных электронов

$$\int_{v_1}^{v_2} f(0, v) dv = \int_{v_1}^{v_2} f_\infty dv,$$

так что

$$f(\infty) = (v_2 - v_1)^{-1} \int_{v_1}^{v_2} f(0, v) dv. \quad (35)$$

Здесь  $v_{1,2}$  — точки в пространстве скоростей, определяющие границы плато; значения  $v_{1,2}$  должны быть найдены одновременно с  $f_\infty$  путем совместного решения уравнения (35) и уравнений

$$f(0, v_1) = f(0, v_2) = f_\infty.$$

\* Они следуют из общих уравнений (86) и (96). Проще, однако, их можно получить из уравнений (8)–(9), произведя следующую очевидную замену:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial \omega_k}{\partial k} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = v_g \frac{\partial \varepsilon}{\partial x}; \quad \frac{\partial f}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial (p^2/2m)}{\partial p} \frac{\partial f}{\partial x} = v \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Спектральная плотность энергии плазменных колебаний при  $x \rightarrow \infty$  может быть найдена следующим образом. Подставляя значение  $\varepsilon df/\partial v$  из первого уравнения системы (34) во второе уравнение, получим

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( v f - \frac{\partial}{\partial v} B A^{-1} v_g \varepsilon \right) = 0,$$

т. е.

$$\varepsilon(v, \infty) = \varepsilon(v, 0) + A B^{-1} v_g^{-1} \int_{v_1}^v v (f_\infty - f_0) dv. \quad (36)$$

Таким образом, при развитии пучковой неустойчивости и размывании «пика» на электронном распределении по скоростям часть кинетической энергии электронов пучка переходит в энергию плазменных волн. При этом полный поток энергии остается, конечно, постоянным, что можно проверить следующим образом. Рассмотрим, например, случай, когда уровень шумов на входе в систему тепловой:  $\varepsilon(v, 0) = 0$ . Умножая обе части выражения (36) на  $2v_g$  и интегрируя по волновым числам  $k = \frac{\omega}{v}$ , получим рав-

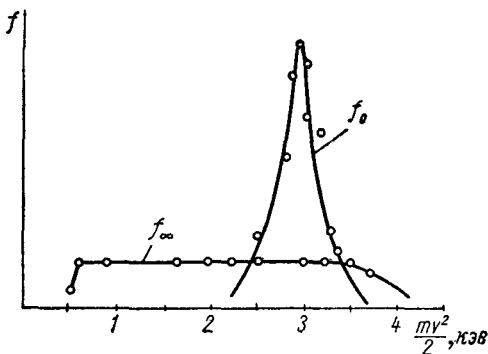


Рис. 4.

венство потоков энергии через сечения  $x = 0$  и  $x = \infty$ :

$$\sum_k v_g 2\varepsilon_k + \int_{v_1}^{v_2} v \frac{mv^2}{2} (f_\infty - f_0) dv = 0. \quad (37)$$

Пределы интегрирования в уравнении (37) можно распространить и до бесконечности, так как вне интервала  $v_1 < v < v_2$  спектральная плотность  $\varepsilon(\infty)$  равна нулю, а функции  $f_0$  и  $f_\infty$  тождественны.

В заключение заметим, что теоретический вывод о релаксации неустойчивой плазмы к состоянию с плато на функции распределения согласуется с экспериментом [16, 21, 25] (рис. 4).

**Задача 2.** Исследовать развитие возмущений в случае неподвижных границ области неустойчивости (рис. 5).

**Решение.** Поскольку  $df/\partial v \rightarrow -\infty$  в двух точках:  $v_0 \pm u$  (см. рис. 5), то эти точки и будут границами области неустойчивости, и функция распределения будет меняться лишь при  $-u < v - v_0 < u$ . При условии, что в этой области начальное распределение электронов  $f(0, v)$  достаточно гладкое, его можно разложить в ряд, ограничившись двумя первыми членами:

$$f(0, v) = \text{const} + A_0 (v - v_0).$$

Из закона сохранения числа частиц следует, что постоянная в этой формуле равна  $f(\infty)$ .

Уравнения (13) — (14), как легко проверить, имеют в этом случае решение

$$F(v, t) = f(\infty) + A(t)(v - v_0);$$

$$D(v, t) = \frac{u^2 - (v - v_0)^2}{2} B(t),$$

где

$$A(t) = \frac{A_0 - B_0}{1 + \frac{B_0}{A_0} \exp(A_0 + B_0)t}; \quad B(t) = A_0 + B_0 - A(t).$$

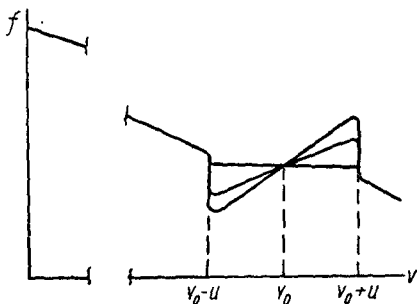


Рис. 5.

Здесь  $A_0 = df(0, v)/dv$ , а величина  $B_0$  пропорциональна амплитуде начальных шумов.

Функция распределения в рассмотренном решении в течение всего процесса остается линейной, а спектр — параболическим.

**Задача 3.** Найти спектр ионизвуковых колебаний, возбуждаемых электрическим током в слабоионизованной плазме.

**Решение.** В стационарном состоянии уравнение для усредненной функции распределения электронов  $\bar{f}$  в интересующей нас области резонансных скоростей имеет вид

$$-\frac{eE_0}{m} \frac{\partial \bar{f}}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial v} D \frac{\partial \bar{f}}{\partial v} + S\bar{f} = 0 \quad (A)$$

где  $E_0$  — внешнее электрическое поле,  $S\bar{f}$  — член столкновений.

Уравнение для волн сводится к равенству скоростей рождения волн электронами и поглощения при столкновениях ионов с нейтралами [4]

$$\frac{\pi}{m} \frac{\partial \bar{f}}{\partial v} = \frac{2}{M} \frac{v_i}{v^3 k}, \quad (B)$$

где  $m$ ,  $M$  — массы электрона и иона соответственно;  $v_i$  — частота столкновений ионов с нейтралами;  $k$  — волновое число. Вид спектра в низкочастотной области можно найти следующим образом. Поскольку

$$D = \frac{\pi e^2}{m^2} \sum_k E_k^2 \delta(\omega_k - kv) \sim \frac{E_k^2}{v - v_g}$$

(где  $v_g$  — групповая скорость), и, с другой стороны, из уравнений (A) и (B) следует, что для малых  $k$

$$D \sim \left( -\frac{\partial \bar{f}}{\partial v} \right)^{-1} \sim k,$$

то

$$E_k^2 \sim (v - v_g) k. \quad (B)$$

Подставляя в соотношение (B) выражения для  $v = \frac{\omega_k}{k}$  и  $v_g = \frac{d\omega_k}{dk}$ , найденные из дисперсионного уравнения

$$\left( \frac{\omega_k}{\Omega} \right)^2 = \frac{(kR_D)^2}{1 + (kR_D)^2}$$

(здесь  $\Omega$  — ионная ленгмюровская частота, а  $R_D$  — дебаевский радиус), приходим к выражениям для плотности шумов в низкочастотной области спектра

$$E_k^2 \sim \left(\frac{\omega}{\Omega}\right)^3, \quad (\omega \ll \Omega),$$

и частотной спектральной плотности квадрата потенциала

$$\varphi_\omega^2 \sim \frac{E_k^2}{k^2 v_g} \sim \frac{\omega}{\Omega}.$$

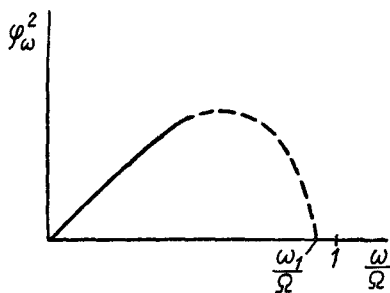


Рис. 6.

Таким образом, величина  $\varphi_\omega^2$  в слабо-турбулентном состоянии линейно растет с увеличением частоты  $\omega$  при  $\omega \ll \Omega$  (рис. 6).

При дальнейшем повышении частоты величина  $\varphi_\omega^2$  достигает максимума, а затем начинает уменьшаться и обращается в нуль при  $\omega = \omega_1 \sim \Omega$ .

### Эффект порогового поглощения волн в плазме и турбулентный нагрев

При распространении в плазме волны с амплитудой, превышающей определенное пороговое значение (зависящее от типа распространяющейся волны и ее периода), состояние плазмы может стать неустойчивым. В этом случае в результате развития неустойчивости часть энергии упорядоченного движения в волне переходит в энергию спектра неравновесных плазменных колебаний, возбуждаемых в системе.

Для иллюстрации эффекта мы рассмотрим задачу о возбуждении волной большой амплитуды одномерного спектра ионно-звуковых колебаний в плазме, предполагая, что под влиянием поля волны электроны приобретают среднюю скорость  $U$  (относительно ионов, находящихся в покое), превышающую критическое значение  $c_s \approx \sqrt{T_e/M}$ . В таком случае в плазме возникают и нарастают ионно-звуковые колебания, что приводит к включению механизма диффузии электронов на этих колебаниях. В результате выравнивания электронной функции распределения область неустойчивости распространяется в пространстве скоростей и охватывает всю область допустимых значений фазовых скоростей ионно-звуковых колебаний  $c_i < v < c_s$  ( $c_i \approx \sqrt{T_i/M}$ ), так как и в этой области электронное распределение выравнивается.

Если по плазме распространяется волна достаточно большой амплитуды, то электронное распределение периодически проходит через зону  $-c_s < v < c_s$ , где существуют ионно-звуковые колебания, и поэтому квазилинейный коэффициент диффузии в пространстве скоростей  $D$  отличен от нуля. Функция распределения электронов будет постепенно сглаживаться, и на ней через

достаточно большой промежуток времени появится плато (рис. 7):

$$f(\infty, v) = \begin{cases} f_\infty = \text{const}; & (|v| < U); \\ f_0(v); & (|v| > U), \end{cases}$$

где  $U$  — максимальное смещение электронного распределения в пространстве скоростей, вызванное внешним полем (предполагается, что  $U \gg c_s$ ), а  $f_\infty = \frac{1}{2U} \int_{-U}^U f_0(v) dv$ . Процесс сглаживания функции распределения описывается уравнением диффузии

$$\frac{\partial f}{\partial t} = k \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$$

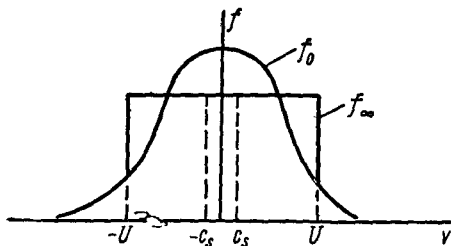


Рис. 7.

(с граничным условием  $(\partial f / \partial v)_{\pm U} = 0$ ), где  $k \approx \omega c_s^2$  при  $U > c_s$ ;  $k = 0$  при  $U < c_s$ ;  $c_s$  — ширина зоны, в которой возбуждены надтепловые шумы, а  $\omega$  — частота внешнего поля. Таким образом, время сглаживания  $\tau \approx \frac{U^2}{k} \approx \frac{1}{\omega} \left(\frac{U}{c_s}\right)^2$ .

Следовательно, внешнее поле с напряженностью, превышающей пороговое значение, перемещая электроны в пространстве скоростей, совершает работу и, возбуждая коллективные колебания плазмы, осуществляет так называемый бесстолкновительный нагрев электронов.

Турбулентный нагрев электронов при развитии возмущений в неустойчивой плазме, в которой имеется относительное движение электронов и ионов, проявляется в том, что в плазме возникают интенсивные высокочастотные колебания, в полях которых электроны совершают хаотическое движение [23]. Наличие таких колебаний стабилизирует систему; пусть, например, в плазме, состоящей из холодного покоящегося электронного газа и движущегося холодного ионного газа, возбуждены высокочастотные колебания; тогда плазма будет устойчивой, если хаотическая скорость электронов  $V \langle v^2 \rangle$  в колебаниях больше скорости движения ионов относительно электронов  $U_0$  (см. задачи 4—5).

**Задача 4.** Вывести уравнения, описывающие медленные процессы в плазме, в которой возбуждены ленгмюровские колебания.

**Решение.** При наличии колебаний высокой частоты на частицы плазмы действует сила

$$f = - \sum_k \frac{e^2}{4m\omega_k^2} \nabla E_k^2. \quad (A)$$



Медленные (по сравнению с характерным периодом в. ч. колебаний  $\langle 1/\omega \rangle$ ) изменения функции распределения  $F$  описываются (в отсутствие внешних сил) уравнением

$$\frac{\partial F}{\partial t} + v \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{f}{m} \frac{\partial F}{\partial v} = 0. \quad (\text{Б})$$

Последним искомым уравнением является уравнение для спектральной плотности энергии в. ч. колебаний; изменение спектральной плотности дается следующим уравнением для величины  $N_k = E_k^2/\omega_k$ :

$$\frac{\partial N_k}{\partial t} + v_g \frac{\partial N_k}{\partial x} - \frac{\partial \omega_k}{\partial x} \frac{\partial N_k}{\partial k} = 0 \quad (\text{В})$$

( $v_g$  — групповая скорость).

**Задача 5.** Исследовать устойчивость ионного потока, движущегося сквозь холодный электронный газ, в котором возбуждены ленгмюровские колебания.

Решение. Вычисляя два первых момента равенства (Б) задачи 4, получаем

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial nU}{\partial x} = 0; \quad (\text{А})$$

$$\frac{dU}{dt} = \frac{f}{m}, \quad (\text{Б})$$

где  $f$  дается формулой (А) задачи 4.

Линеаризуя первое из этих равенств и уравнение (Б) задачи 4, находим изменение  $\delta N_k$  величины  $N_k$  в плоской волне, все величины в которой меняются пропорционально  $e^{-i\Omega t + iqx}$ :

$$\begin{aligned} -i\Omega \delta N_k - k i q U \frac{\partial N_k}{\partial k} - \frac{i q \omega_0}{2} \frac{\delta n}{n} \frac{\partial N_k}{\partial k} &= 0; \\ -i\Omega \delta n + i q n U &= 0, \end{aligned}$$

т. е.

$$\delta N_k = -\frac{\delta n}{n} \left( k + q \frac{\omega_0}{2\Omega} \right) \frac{\partial N_k}{\partial k}.$$

Изменение спектральной плотности в. ч. колебаний равно

$$\begin{aligned} \delta E_k^2 &= \delta(\omega_k N_k) = \omega_k \delta N_k + N_k \left( \frac{\omega_0}{2} \frac{\delta n}{n} + k U \right) = \\ &= \frac{\delta n}{n} \left( 1 + 2 \frac{k}{q} \frac{\Omega}{\omega_0} \right) \left( \frac{\omega_0 N_k}{2} + \frac{\omega_0}{\Omega} q \frac{\partial N_k}{\partial k} \right). \end{aligned}$$

Подставляя это значение  $\delta E_k^2$  в формулу (Б) (и ограничиваясь для простоты случаем, когда  $\bar{k} = \sum_k k N_k / \sum_k N_k = 0$ ), получаем:

$$\frac{dU}{dt} = -i q \frac{\delta n}{n} \sum_k \frac{e^2}{4m^2 \omega_0^2} E_k^2. \quad (\text{В})$$

Из формулы (В) видно, что наличие колебаний эквивалентно существованию теплового разброса скоростей у электронов (т. е. электронного давления):

$$\langle v^2 \rangle = \sum_k \frac{e^2}{4m^2 \omega_0^2} E_k^2; \quad (\text{Г})$$

поэтому по линейной теории устойчивости ионного потока, движущегося со скоростью  $U_0$  сквозь электронный газ [4], плазма будет устойчивой при условии

$$U_0 < \sqrt{\langle v^2 \rangle},$$

где  $\langle v^2 \rangle$  дается формулой (Г).

### Плазмон-плазмонное взаимодействие

До сих пор мы рассматривали слаботурбулентную плазму, предполагая, что плотность энергии волн достаточно мала, так что взаимодействием волн можно было пренебречь, и основную роль играли процессы испускания и поглощения коллективных плазменных колебаний резонансными частицами. При увеличении энергии волн становится существенным их взаимодействие; поскольку в турбулентной плазме одновременно возбуждено много волн, и их фазы случайны, взаимодействие волн сводится к «столкновениям» волн и может быть описано на основе кинетического уравнения для функции распределения волн (плазмонов) в фазовом пространстве\*.

Вывод кинетического уравнения для волн удобно производить, исходя из лагранжиана плазмы, разложенного в ряд по степеням амплитуд коллективных плазменных колебаний. Полный лагранжиан  $L$  для плазмы можно записать в следующем виде (см. работу [8]):

$$L = \sum_{\nu} \iint dx dv \int_{\nu} \left\{ \frac{m_{\nu} (v + D_{\nu} y_{\nu})^2}{2} - e_{\nu} V_0 (x + y_{\nu}) - e_{\nu} \varphi (x + y_{\nu}) + e_{\nu} (v + D_{\nu} y_{\nu}) (A_0 (x + y_{\nu}) + \alpha (x + y_{\nu})) \right\} + \frac{1}{8\pi} \int dx \{ (E_0 + e)^2 - (B_0 + b)^2 \}. \quad (38)$$

Здесь  $y_{\nu}(x, v, t)$ ,  $\varphi$  и  $\alpha$  — переменные, по которым производится варьирование, а  $f_{\nu}(x, v)$  — стационарная функция распределения частиц сорта  $\nu$  в стационарных полях  $E_0 = -\nabla V_0$ ,  $B_0 = \nabla \times A_0$ , удовлетворяющих системе уравнений Максвелла:

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times E_0 = 0; \quad \nabla \cdot E_0 = \sum_{\nu} \int e_{\nu} f_{\nu}(x, v) dv; \\ \nabla \cdot B_0 = 0; \quad \nabla \times B_0 = \frac{4\pi}{c} \sum_{\nu} \int e_{\nu} v f_{\nu}(x, v) dv. \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

Оператор  $D_{\nu}$ , фигурирующий в выражении (38), представляет собой полную производную по времени вдоль траектории частицы сорта  $\nu$  в полях  $E_0$  и  $B_0$ :

$$D_{\nu} = \frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x} + a_{0\nu} \frac{\partial}{\partial v}, \quad (40)$$

\* Взаимодействие плазмонов между собой аналогично взаимодействию фононов в конденсированных средах, и кинетические уравнения для двух этих случаев записываются аналогично.

где

$$a_{0v} = \frac{e_v}{m_v} \left\{ E_0(x) + \frac{v}{c} \times B_0(x) \right\}. \quad (41)$$

Величины  $y$ ,  $\varphi$  и  $\alpha$  представляют собой смещение частиц и отклонения скалярного и векторного потенциалов от равновесных значений в стационарном состоянии. Разлагая лагранжиан  $L$  в ряд по степеням  $y$ ,  $\varphi$ ,  $\alpha$ , мы получим лагранжианы нулевого, первого, второго и т. д. порядков  $L_0, L_1, L_2, \dots$ . Лагранжиан нулевого порядка  $L_0$  не содержит  $y$ ,  $\varphi$  и  $\alpha$ ; лагранжиан  $L_1$  тождественно исчезает; лагранжиан  $L_2$  описывает гармонические колебания плазмы (см. работу [8]). Что же касается лагранжианов третьего и четвертого порядков  $L_3$  и  $L_4$ , то они описывают взаимодействие этих гармонических колебаний (плазмонов).

Для простоты мы ограничимся сначала рассмотрением продольных колебаний в однородной изотропной плазме ( $E_0 = B_0 = 0$ ); в этом случае из выражения (38) получаем

$$L_3 = - \sum_v \frac{e_v}{2} \iint dx dv f_v(x, v) y_\alpha^v y_\beta^v \nabla_\alpha \nabla_\beta \varphi; \quad (42)$$

$$L_4 = - \sum_v \frac{e_v}{6} \iint dx dv f_v(x, v) y_\alpha^v y_\beta^v y_\gamma^v \nabla_\alpha \nabla_\beta \nabla_\gamma \varphi. \quad (43)$$

### Трехплазменные процессы

Рассмотрим сначала такие процессы взаимодействия волн, в которых участвуют три плазмона. Такими процессами могут быть: а) распад одного плазмона на два; б) слияние двух плазмонов в один (рис. 8).

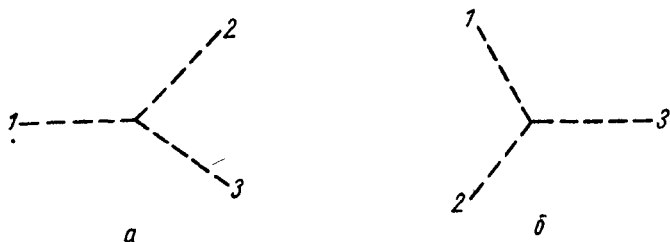


Рис. 8.

При таких процессах должны выполняться законы сохранения частоты  $\omega$  и волнового вектора  $k$  (в противном случае амплитуда вероятности перехода обращается в нуль), имеющие для случаев а) и б) следующий вид:

$$\text{а) } k_1 = k_2 + k_3; \quad \omega_1 = \omega_2 + \omega_3. \quad (44)$$

$$\text{б) } k_1 + k_2 = k_3; \quad \omega_1 + \omega_2 = \omega_3. \quad (45)$$

В изотропной плазме, где имеются плазмоны двух типов — ионно-звуковые ( $s$ ) и ленгмюровские ( $l$ ) колебания (мы предполагаем, что выполнено необходимое условие существования слабозатухающих ионно-звуковых волн: электронное давление намного превышает ионное и, кроме того, рассматриваем лишь слабозатухающие длинноволновые ленгмюровские колебания), законами сохранения (44—45) разрешены только такие трехплазмонные процессы, в которых участвуют два ленгмюровских плазмона и один звуковой. Действительно, длинноволновые  $l$ -плазмоны имеют приблизительно одинаковую частоту  $\omega \approx \omega_{0e}$ , так что один  $l$ -плазмон не может распадаться на два, и наоборот, два  $l$ -плазмона не могут слиться в один. Ионно-звуковые колебания не могут взаимодействовать между собой в трехплазмонных процессах вследствие того, что их спектр является «нераспадным» — частота этих колебаний  $\omega$  увеличивается с ростом волнового числа  $k$  медленнее, чем по линейному закону (см. задачу 6). Наконец, трехплазмонные процессы, в которых участвуют два  $s$ -плазмона и один  $l$ -плазмон, невозможны в плазме с достаточно малым отношением массы электрона  $m$  к массе иона  $M$ , поскольку в этом случае максимально возможная частота ионно-звуковых волн значительно меньше частоты ленгмюровских колебаний, и закон сохранения частоты в таких процессах не может выполняться.

Рассматривая единственно возможные трехплазмонные процессы с участием одного  $s$ -плазмона и двух  $l$ -плазмонов, выразим в лагранжиане (42) смещения  $y^e$  через потенциал  $\Phi$  (ионное слагаемое в  $L_3$  можно опустить, так как его вклад мал, если  $m/M \ll 1$  — при этом ионные скорости и смещения в ленгмюровских колебаниях малы по сравнению с электронными):

$$y^e = \sum_k \frac{e}{m} ik \left\{ \frac{\Phi_k^s}{(kv)^2} + \frac{\Phi_k^l}{-\omega_{0e}^2} \right\} e^{ikx}, \quad (46)$$

где  $\Phi_k^s$  и  $\Phi_k^l$  — пространственные фурье-компоненты потенциала в ионно-звуковых и ленгмюровских колебаниях, соответственно. Подставляя это значение  $y^e$  в формулу (42), мы находим следующее выражение для лагранжиана, описывающего трехплазмонные процессы в изотропной плазме:

$$L_3 = \sum_{p+q+r=0} \Lambda_{p;qr} \Phi_p^s \Phi_q^l \Phi_r^l, \quad (47)$$

где

$$\Lambda_{p;qr} = \frac{e^3}{2m^2} \int \frac{fdv}{(n \cdot v)^2} \frac{q \cdot r}{2\omega_{0e}^2} \approx \frac{eq \cdot r}{T}. \quad (48)$$

Исходя из классического лагранжиана (47), мы можем с помощью метода вторичного квантования написать систему кине-

тических уравнений для функций распределения  $l$ - и  $s$ -плазмонов. Для функции распределения  $l$ -плазмонов  $n_k$  имеем:

$$\dot{n}_1 = \sum \omega_{12} \{ -n_1(n_3 + 1)(N_2 + 1) + (n_1 + 1)n_3N_2 \} + \\ + \sum \omega_{21} \{ -n_1(n_3 + 1)N_2 + (n_1 + 1)n_3(N_2 + 1) \}, \quad (49)$$

где  $\omega_{12}$  — вероятность распада  $l$ -плазмона  $k_1$  на  $s$ -плазмон  $k_2$  и  $l$ -плазмон  $k_3$ , а  $\omega_{21}$  — вероятность слияния  $l$ -плазмона  $k_1$  и  $s$ -плазмона  $k_2$  в  $l$ -плазмон  $k_3$ . Суммирование в уравнении (49) ведется по волновым числам  $k_2$  и  $k_3$ , удовлетворяющим законам сохранения (44) в первом и законам сохранения (45) во втором интеграле столкновений.

Аналогичное уравнение для функции распределения  $s$ -плазмонов  $N_k$  имеет вид

$$\dot{N}_2 = \sum \omega_{21} \{ -N_2n_1(n_3 + 1) + (N_2 + 1)(n_1 + 1)n_3 \}. \quad (50)$$

Здесь  $\omega_{21}$  — вероятность слияния  $s$ -плазмона  $k_2$  и  $l$ -плазмона  $k_1$  в  $l$ -плазмон  $k_3$ . Второй интеграл столкновений в уравнении (50) отсутствует, так как распад низкочастотного  $s$ -плазмона на два высокочастотных  $l$ -плазмона запрещен законом сохранения частоты (как и обратный процесс слияния двух  $l$ -плазмонов в один  $s$ -плазмон).

Вероятности  $\omega$ , фигурирующие в формулах (49) и (50), выражаются через матричные элементы лагранжиана (42):

$$\omega_{12} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle n_1, N_2, n_3 | L_3 | n_1 - 1, N_2 + 1, n_3 + 1 \rangle|^2;$$

$$\omega_{21} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle n_1, N_2, n_3 | L_3 | n_1 - 1, N_2 - 1, n_3 + 1 \rangle|^2;$$

таким образом,

$$\omega_{12} = \omega_{21} = \frac{2\pi}{\hbar} |\Lambda_{p;qr}|^2 |\Phi_{k_2}^s|^2 |\Phi_{k_1}^l|^2 |\Phi_{k_3}^l|^2. \quad (51)$$

Здесь  $\Phi^s, \Phi^l$  — матричные элементы потенциала для  $s$ - и  $l$ -волн:

$$\Phi_k^s = \frac{1}{k} \sqrt{2\pi\hbar\omega_s(k)}; \quad (52)$$

$$\Phi_k^l = \frac{1}{k} \sqrt{2\pi\hbar\omega_l(k)}. \quad (53)$$

Подставляя значение  $\omega_{21}$  (51) в кинетическое уравнение для  $s$ -плазмонов, получаем

$$\dot{N}_2 = \int \frac{dk_1}{(2\pi)^3} \frac{dk_3}{(2\pi)^3} \delta(k_1 + k_2 - k_3) \delta(\omega_1 + \omega_2 - \omega_3) \frac{2\pi}{\hbar^2} |\Lambda_{k_2; k_1, k_3}|^2 \times \\ \times \frac{2\pi\hbar\omega_s(k_2)}{k_2^2} \frac{2\pi\hbar\omega_l(k_1)}{k_1^2} \frac{2\pi\hbar\omega_l(k_3)}{k_3^2} \{ -N_2n_1(n_3 + 1) + \\ + (N_2 + 1)(n_1 + 1)n_3 \}. \quad (54)$$

Из этого уравнения, подставляя  $n_k = \frac{|E_k^l|^2}{\hbar\omega_l}$ , находим порядок характерной «частоты столкновений»  $s$ -плазмонов с  $l$ -плазмонами

$$\gamma_3 = \frac{\dot{N}_2}{N_2} \approx \omega_3 \frac{|E^l|^2}{nT} \quad (55)$$

(выражение для  $\gamma_3$  полезно записать в виде

$$\gamma_3 \approx \omega_s \left( \frac{v_{\sim}}{U} \right)^2,$$

где  $v_{\sim}$  — хаотическая скорость электронов в колебаниях, а  $U$  — фазовая (или групповая) скорость для волн с  $k \lesssim R_D^{-1}$ ).

Величина  $\gamma_3$  определяет ряд характеристик слаботурбулентной плазмы; например, характерная длина затухания  $L$  ионно-звуковых волн в плазме с сильно возбужденными ленгмюровскими колебаниями примерно равна длине свободного пробега  $s$ -плазмона до соударения с  $l$ -плазмонами, и следовательно, связана с частотой столкновений  $\gamma_3$  формулой

$$L \approx c_s / \gamma_3. \quad (56)$$

Кинетическое уравнение (50) для функции распределения  $l$ -плазмонов после подстановки в него значения вероятностей перехода  $\omega$  (51) принимает вид:

$$\begin{aligned} \dot{n}_1 = & \int \frac{dk_2}{(2\pi)^3} \frac{dk_3}{(2\pi)^3} \frac{2\pi}{\hbar^2} |\Lambda_{k_2; k_1 k_3}|^2 \frac{2\pi\hbar\omega_s(k_2)}{k_2^2} \times \\ & \times \frac{2\pi\hbar\omega_l(k_1)}{k_1^2} \frac{2\pi\hbar\omega_l(k_3)}{k_3^2} \cdot \{ (-n_1(N_2 + 1)(n_3 + 1) + \\ & + (n_1 + 1)N_2 n_3) \delta(k_1 - k_2 - k_3) \delta(\omega_1 - \omega_2 - \omega_3) + \\ & + (-n_1 N_2 (n_3 + 1) + (n_1 + 1)(N_2 + 1)n_3) \delta(k_1 + k_2 - k_3) \times \\ & \times \delta(\omega_1 + \omega_2 - \omega_3) \}. \quad (57) \end{aligned}$$

Система уравнений (54) и (57) полностью описывает динамику слаботурбулентной изотропной плазмы в отсутствие резонансных частиц. При наличии же резонансных частиц для исследования процессов в турбулентной плазме нужно пользоваться системой уравнений для волн и резонансных частиц, учитывая взаимодействие волн (плазмонов) в виде интегралов столкновений (54) и (57).

Следует заметить, что структура интегралов столкновений (54) и (57) несколько упрощается в случае классической плазмы. Действительно, поскольку средние «числа заполнения»  $N_k$  связаны со спектральной плотностью энергии колебаний  $Q_k$  соотношением  $N_k = Q_k / \hbar\omega_k$ \*, то в случае классической плазмы

\* Например, для длинноволновых ленгмюровских колебаний

$$Q_k = \frac{nmv_k^2}{2} + \frac{E_k^2}{8\pi} = \frac{E_k^2}{4\pi}; \quad N_k = \frac{E_k^2}{4\pi\hbar\omega_0}.$$

( $\hbar \rightarrow 0$ ) в интегралах столкновений нужно удерживать лишь члены наиболее высокого порядка по  $N$  или  $n$ ; при этом интегралы столкновений (54) и (57) оказываются квадратичными по  $N$  и  $n$ :

$$-n_1 N_2 (n_3 + 1) + (n_1 + 1) (N_2 + 1) n_3 \rightarrow -N_2 n_1 + N_2 n_3 + n_1 n_3; \quad (58)$$

$$\hbar \rightarrow 0$$

$$-n_1 (N_2 + 1) (n_3 + 1) + (n_1 + 1) N_2 n_3 \rightarrow -n_1 N_2 - n_1 N_3 + N_2 n_3 \quad (59)$$

$$\hbar \rightarrow 0$$

и после замены  $N_k = Q_k / \hbar \omega_k$  постоянная Планка исчезает из уравнений (54) и (57)\*.

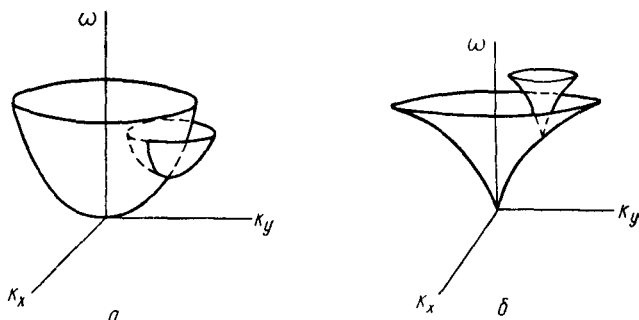


Рис. 9.

Кинетические уравнения, описывающие трехплазменные процессы в анизотропной (а также и неоднородной) плазме, можно получить аналогично, выделяя члены третьего порядка по амплитуде колебаний в лагранжиане (38). Такие трехплазменные процессы определяют ряд важных характеристик турбулентной плазмы, в частности, турбулентные коэффициенты переноса вещества, импульса и энергии. Знание этих коэффициентов необходимо для решения ряда задач: о структуре турбулентного фронта ударной волны в разреженной плазме (см. работы [27, 28], об «аномальной» диффузии плазмы (см. задачу 7) и т. п.

**Задача 6.** При какой зависимости  $\omega = \omega(k)$  законы сохранения частоты и волнового вектора допускают трехплазменный процесс, в котором участвуют плазмы одного типа?

**Решение.** Для наглядности рассмотрим случай, когда частота  $\omega$  зависит лишь от модуля двумерного волнового вектора  $\mathbf{k} = \{k_x, k_y\}$ ; при этом функция  $\omega = \omega(|\mathbf{k}|)$  представляет собой в пространстве  $(k_x, k_y, \omega)$  поверхность вращения вокруг оси  $\omega$  (рис. 9).

Законы сохранения разрешают трехплазменный процесс, если уравнение  $\omega(\mathbf{k}) + \omega(\mathbf{q}) = \omega(\mathbf{k} + \mathbf{q})$  имеет решение, т. е. если поверхность  $\omega$  пересекается

\* Непосредственный вывод классических ( $\hbar = 0$ ) интегралов столкновений для плазмонов из уравнений гидродинамического типа был проведен в работах [27, 28].

с такой же поверхностью, но изображенной в координатной системе, начало которой лежит на поверхности  $\omega$  (рис. 9, а); в противном случае трехплазменный процесс запрещен (рис. 9, б). Из рис. 9 видно, что процесс запрещен для спектров, у которых  $\omega$  растет медленнее, чем  $k$ .

**Задача 7.** Оценить величину коэффициента «аномальной» диффузии слабо-неоднородной разреженной плазмы в магнитном поле.

**Решение.** Причиной аномальной диффузии является возбуждение в неустойчивой неоднородной плазме дрейфовых волн [24]. Эти волны излучаются электронами и поглощаются ионами, вследствие чего возникает перенос импульса, т. е. сила трения между электронным и ионным газами

$$f \approx \gamma' N \hbar k_{\perp} = v_{эф} n m U. \quad (A)$$

Здесь  $N \approx n M v_{\perp}^2 / \hbar \omega$  — плотность газа дрейфовых волн;  $\omega$  и  $k_{\perp}$  — характерные частота и волновой вектор,  $U$  — дрейфовая скорость,  $\gamma'$  — частота испускания волн электронами (инкремент линейной теории).

В стационарном турбулентном состоянии частота испускания волн  $\gamma'$  должна быть равна частоте столкновений волн между собой в трехплазменных процессах; при  $k_{\perp} \rho_i \approx 1$

$$\gamma' \approx \frac{k_{\perp}^2 v_{\perp}^2}{\omega}. \quad (B)$$

Находя из выражения (Б) величину  $v_{\perp}^2$  и подставляя ее в выражение (А), найдем эффективную частоту столкновений  $v_{эф}$  и коэффициент аномальной диффузии:

$$D_a \approx \frac{\gamma'^2}{\omega \omega_{Hi}} \frac{cT}{eH} \approx \frac{m}{M\beta} \frac{\rho_i}{a} \frac{cT}{eH}.$$

### Процессы высших порядков

В ряде случаев зависимость частоты коллективных колебаний плазмы от волнового вектора такова, что процессы взаимодействия волн с участием трех плазмонов запрещены законами сохранения частоты и волнового вектора при взаимодействии. В этом случае для учета взаимодействия волн необходимо рассмотреть процессы, в которых участвуют четыре волны.

Матричные элементы четырехплазменных процессов и, следовательно, вероятности перехода, можно найти с помощью лагранжианов  $L_3$  и  $L_4$  аналогично тому, как это было сделано выше для трехплазменных процессов (вклад в вероятности четырехплазменных процессов вносят матричные элементы первого порядка теории возмущений от  $L_4$  и второго порядка теории возмущений — от  $L_3$ ).

В случае изотропной плазмы, который мы рассматриваем ниже, законами сохранения запрещены трехплазменные процессы с участием только ленгмюровских волн или только ионно-звуковых колебаний. По этой причине кинетика электронных ленгмюровских колебаний, возбужденных в плазме, описывается уравнением, учитывающим наряду с рассмотренными выше трехплазменными процессами процессы взаимодействия четырех ленгмюровских волн; если же в плазме возбуждены ионно-звуковые коле-



бания, то их кинетика определяется процессами взаимодействия четырех этих волн.

При взаимодействии четырех плазмонов возможны, вообще говоря, следующие процессы: а) переход двух плазмонов в два; б) распад одного плазмона на три; в) слияние трех плазмонов в один (рис. 10, а, б, в). Поэтому кинетическое уравнение для волн,

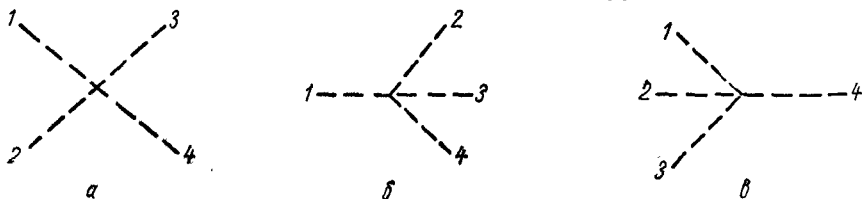


Рис 10.

учитывающее только четырехплазмонные процессы, имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dN_1}{dt} = & \sum \omega_{2,2} \{ (N_1 + 1) (N_2 + 1) N_3 N_4 - N_1 N_2 (N_3 + 1) (N_4 + 1) \} + \\ & + \sum \omega_{1,3} \{ (N_1 + 1) N_2 N_3 N_4 - N_1 (N_2 + 1) (N_3 + 1) (N_4 + 1) \} + \\ & + \sum \omega_{3,1} \{ (N_1 + 1) (N_2 + 1) (N_3 + 1) N_4 - N_1 N_2 N_3 (N_4 + 1) \}. \quad (60) \end{aligned}$$

Суммирование в уравнении (60) производится по волновым числам  $k_2, k_3, k_4$  с учетом законов сохранения, которые для первого, второго и третьего слагаемых правой части уравнения (60) имеют соответственно следующий вид:

а)  $k_1 + k_2 = k_3 + k_4; \omega_1 + \omega_2 = \omega_3 + \omega_4;$

б)  $k_1 = k_2 + k_3 + k_4; \omega_1 = \omega_2 + \omega_3 + \omega_4;$

в)  $k_1 + k_2 + k_3 = k_4; \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = \omega_4.$

Для ионно-звуковых колебаний кинетическое уравнение содержит все три слагаемых; что же касается длинноволновых электронных ленгмюровских колебаний, то для них процессы б) и в) запрещены (поскольку для этих колебаний частота примерно одинакова и равна  $\omega_{0e}$ ), так что уравнение (60) принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{N}_1 = & \sum \omega_{2,2} \{ (N_1 + 1) (N_2 + 1) N_3 N_4 - \\ & - N_1 N_2 (N_3 + 1) (N_4 + 1) \}. \quad (61) \end{aligned}$$

Таким образом, интеграл столкновений от четырехплазмонных процессов в кинетическом уравнении для ленгмюровских колебаний есть

$$\begin{aligned} \dot{N}_1 = & \int B \{ (N_1 + 1) (N_2 + 1) N_3 N_4 - N_1 N_2 (N_3 + 1) (N_4 + 1) \} \times \\ & \times \delta (\omega_1 + \omega_2 - \omega_3 - \omega_4) dk_2 dk_3, \quad (62) \end{aligned}$$

где  $k_4 = k_1 + k_2 - k_3$  и

$$B \approx \frac{\hbar^2 k^4}{n^2 m^2}. \quad (63)$$

Из уравнения (62), подставляя  $N_k \approx E_k^2 / \hbar \omega_k$ , находим характерную частоту столкновений в газе ленгмюровских волн:

$$\gamma_4 = \frac{\dot{N}}{N} \approx \omega \left( \frac{E^2}{nT} \right)^2, \quad (64)$$

где  $\omega \approx \omega_{0e}$ , а  $\frac{E^2}{4\pi} = \sum_k E_k^2 / 4\pi$  — плотность энергии колебаний. Следует заметить, что оценку частоты столкновений  $\gamma_4$  в газе волн можно получить следующим образом. Поскольку интеграл столкновений пропорционален  $N^3$ , частота  $\gamma_4$  должна быть пропорциональна  $N^2$ , т. е. четвертой степени отношения амплитуды хаотической скорости электронов в ленгмюровских колебаниях к фазовой (или групповой) скорости  $U$  этих колебаний (с волновым числом  $k < 1/R_D$ ). Коэффициент пропорциональности, по соображениям размерности, должен быть равен частоте колебаний, так что

$$\gamma_4 \approx \omega \left( \frac{v_{\sim}}{U} \right)^4. \quad (65)$$

Подставляя  $v_{\sim} \approx \frac{eE}{m\omega}$ ;  $U \approx \sqrt{T/m}$ , мы снова приходим к соотношению (64).

Частота  $\gamma_4$  определяет ряд характеристик турбулентной плазмы. Время распада турбулентного спектра ленгмюровских колебаний, возбужденных в плазме, примерно равно  $\gamma_4^{-1}$ ; частота  $\gamma_4$  (или длина свободного пробега ленгмюровских волн до столкновения между собой) определяет и поток энергии  $q$  в газе ленгмюровских волн;  $q \approx \frac{v_T^2}{\gamma_4} \nabla E^2$ ; декремент нелинейного затухания ленгмюровской волны конечной амплитуды по порядку величины также равен  $\gamma_4$ .

Как отмечалось выше, структура интеграла столкновений (между собой) для ионных волн более сложна, чем для ленгмюровских; частоту столкновений в газе ионно-звуковых волн можно оценить с помощью формулы (65), подставляя в нее

$$v_{\sim} \approx eE/M\omega; \quad U \approx \sqrt{T/M}; \quad \omega \approx \omega_{0i};$$

$$\gamma_4^s \approx \omega_{0i} \left( \frac{E^2}{nT} \right)^2. \quad (66)$$

Возможна ситуация, в которой для описания физических явлений в слаботурбулентной плазме необходимо учитывать про-

цессы более высокого порядка, чем рассмотренные выше процессы излучения — поглощения плазмона частицей или трех и четырехплазмонные процессы. К таким процессам относятся, например, рассеяние плазмона на частице (рис. 11, а), одновременное поглощение (см. рис. 11, б) или испускание (см. рис. 11, в) двух плазмонов частицей. Необходимость учета такого процесса может возникнуть, например, в случае, когда в силу законов сохранения частоты и волнового вектора запрещен процесс поглощения — испускания одного плазмона частицей [26].

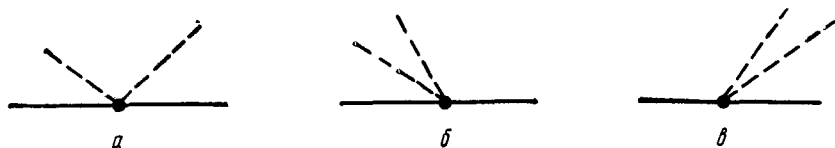


Рис. 11.

Член столкновений в кинетическом уравнении для плазмонов, описывающий процесс, изображенный на рис. 11, а, имеет вид

$$\dot{N}_1 = \sum \omega_{12; 34} \{ -N_1 (N_2 + 1) f_3 (1 - f_4) + (N_1 + 1) N_2 (1 - f_3) f_4 \} \quad (67)$$

(суммирование проводится с учетом законов сохранения частоты и волнового вектора) и приводит в разреженной плазме к следующей формуле для относительного изменения числа плазмонов:

$$\frac{\dot{N}_1}{N_1} = - \sum \omega_{12; 34} N_2 (f_3 - f_4).$$

Аналогичным образом можно найти вклад того же процесса в член столкновений для частиц.

При решении вопросов динамики турбулентной плазмы может оказаться необходимым суммирование рядов теории возмущений подобно тому, как это делается в физике твердого тела, однако для исследования большинства задач слаботурбулентной плазмы учет процесса испускания — поглощения плазмонов электронами и ионами и трех или четырехплазмонных процессов оказывается достаточным.

Таким образом, квазилинейные уравнения (8) — (9) с учетом интегралов столкновений для плазмонов (54), (57), (62) и (67) представляют собой замкнутую систему, с помощью которой можно исследовать процессы в слаботурбулентной плазме.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 16, вып. 7 (1946).
2. Власов А. А. Теория многих частиц. М. — Л., Гостехиздат, 1950.
3. Боголюбов Н. Н. Проблемы динамической теории в статистической физике. М., Гостехиздат, 1946.

4. В е д е н о в А. А., В е л и х о в Е. П., С а г д е е в Р. З. «Усп. физ. наук», **73**, 701 (1961).
  5. Распространение волн в плазме. Сб. «Пробл. совр. физ.». М., Гостехиздат, 1952.
  6. Л а н д а у Л. Д. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **7**, 203 (1937).
  7. Д а в ы д о в Б. И. В кн. «Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций», т. I. М., Изд-во АН СССР, 1958, стр. 77.
  8. L o w F. Proc. Roy. Soc., A **248**, 282 (1958).
  9. Р о м а н о в Ю., Ф и л и п п о в Г. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **40**, 123 (1961).
  10. Plasma Physics. Сб. под ред. Drummond'a, New York, 1960.
  11. P i n e s D. Schrieffer R. Phys. Rev., **125**, 804 (1962).
  12. К о н с т а н т и н о в О. В., П е р е л ь В. И. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **39**, 861 (1960).
  13. В е д е н о в А. А., В е л и х о в Е. П., С а г д е е в Р. З. «Ядерный синтез», **1**, 82 (1961).
  14. В е д е н о в А. А., В е л и х о в Е. П., С а г д е е в Р. З. Доклад № 198, представленный на конференцию по физике плазмы и контролируемым термоядерным реакциям. Зальцбург, сентябрь, 1961.
  15. В е д е н о в А. А. «Атомная энергия», **13**, 5 (1962).
  16. Х о р ч е н к о И. Ф., Ф а й н б е р г Я. Б. и др. Доклад № 230, представленный на конференцию по физике плазмы и контролируемым термоядерным реакциям. Зальцбург, сентябрь, 1961.
  17. В е д е н о в А. А., Л а р к и н А. И. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **36**, 1133 (1959).
  18. D g i t t o n d W, P i n e s D. Доклад № 134, представленный на конференцию по физике плазмы и контролируемым термоядерным реакциям. Зальцбург, сентябрь, 1961.
  19. В е д е н о в А. А., В е л и х о в Е. П. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **43**, 964 (1962).
  20. В е д е н о в А. А. «Докл. АН СССР», **147**, 334 (1962).
  21. P u t n a m L. H. et al. Phys. Rev. Lett. **7**, 77 (1961).
  22. В е д е н о в А. А., В е л и х о в Е. П. «Докл. АН СССР», **146**, 65 (1962).
  23. З а в о й с к и й Е. К. «Атомная энергия», 1963, № 1,
  24. М и х а й л о в с к и й А. Б. Колебания неоднородной плазмы. См. настоящий выпуск, стр. 141
  25. E t i e v a n t C, P e r u l l i M. Compt. rend., **255**, 855 (1962).
  26. M a t s u i g a K., O g a w a K. Progr. Theoret. Phys., **28**, 946 (1962).
  27. С а т а с М. et al. «Ядерный синтез». Дополнение 1962, кн. 2, 423 (1962).
  28. Г а л е е в А., К а р п м а н В. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **44**, 592 (1963).
-

# СИММЕТРИЧНЫЕ МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ ТЕЧЕНИЯ И ВИНТОВЫЕ ВОЛНЫ В КРУГЛОМ ПЛАЗМЕННОМ ЦИЛИНДРЕ

*Л. С. Соловьев*

## Введение

Симметричными или двухпараметрическими стационарными течениями называются такие течения, в которых все величины зависят от двух пространственных координат  $q_1$ ,  $q_2$  и не зависят от третьей координаты  $q_3$ . Наличие симметрии позволяет найти ряд интегралов движения и существенно упростить задачу исследования таких течений. Наиболее общим видом пространственной симметрии является винтовая симметрия, когда все величины постоянны вдоль винтовых линий  $\varphi - az = \text{const}$ ,  $r = \text{const}$ , имеющих постоянный шаг  $L = \frac{2\pi}{a}$ . Для построения общей теории симметричных течений, которая включала бы также и случай винтовой симметрии, необходимо вести вычисления в неортогональной криволинейной системе координат  $q_i$  (см. приложение).

Впервые симметричные магнитогидродинамические течения рассматривались С. Чандрасекаром [1], который ограничился случаем аксиально-симметричных течений несжимаемой жидкости. В работах В. Ткалича [2, 3] получены уравнения симметричных течений несжимаемой жидкости в произвольной ортогональной системе координат, однако они описывают только случаи трансляционной и аксиальной симметрий. Мы рассмотрим здесь общий случай течений сжимаемой жидкости, обладающих винтовой симметрией, но будем использовать для простоты обычные цилиндрические координаты  $r$ ,  $\varphi$  и  $z$ , поскольку преобразование полученных уравнений к новым координатам не представляется сложным. Уравнения для аксиальной и трансляционной симметрий получаются из случая винтовой симметрии предельными переходами при стремлении шага винта  $L$  к нулю и бесконечности.

Симметричные магнитогидродинамические течения включают в себя в качестве частных случаев симметричные равновесные плазменные конфигурации [4—7] и симметричные течения в обыч-

ной гидродинамике [8]. Винтовые магнитогидродинамические течения представляют особый интерес, так как они позволяют рассмотреть винтовые волны в плазменном цилиндре, являющиеся наиболее опасными с точки зрения проблемы устойчивости плазменного шнура с продольным током.

### § 1. Стационарные винтовые течения

Стационарные течения идеально проводящей жидкости в магнитном поле при отсутствии диссипативных процессов описываются следующей системой уравнений магнитной гидродинамики

$$\rho (\mathbf{v}\nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \frac{1}{4\pi} [\text{rot } \mathbf{B}\mathbf{B}] - \rho \nabla \Phi; \quad (1.1)$$

$$\text{rot } [\mathbf{v}\mathbf{B}] = 0; \quad (\mathbf{v}\nabla S) = 0; \quad (1.2)$$

$$\text{div } \rho \mathbf{v} = 0; \quad \text{div } \mathbf{B} = 0. \quad (1.3)$$

Здесь  $\mathbf{v}$  — скорость жидкости,  $\rho$  — ее плотность,  $p$  — давление,  $S$  — энтропия,  $\mathbf{B}$  — магнитное поле,  $\Phi$  — потенциал внешних сил неэлектромагнитного происхождения, например, силы тяжести. Первое из уравнений (1.2) является условием вмерзности силовых линий магнитного поля, а второе представляет собой условие сохранения энтропии вдоль линий тока жидкости. Введем тепловую функцию  $W$  согласно термодинамическому соотношению

$$dW = \frac{dp}{\rho} + T dS, \quad (1.4)$$

где  $T$  — температура.

Для более симметричной записи введем обозначения

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\sqrt{4\pi}}; \quad \omega = W + \frac{v^2}{2} + \Phi; \quad (1.5)$$

$$\mathbf{j} = \text{rot } \mathbf{H}; \quad \mathbf{j}_0 = \text{rot } \mathbf{v}. \quad (1.6)$$

Тогда уравнения (1.1) — (1.3) можно представить в виде

$$\text{div } \mathbf{H} = 0; \quad \text{div } \rho \mathbf{v} = 0; \quad (1.7)$$

$$[\mathbf{v}\mathbf{H}] = \nabla \Phi_E; \quad [\mathbf{j}_0 \mathbf{v}] - \frac{1}{\rho} [\mathbf{j}\mathbf{H}] = -\nabla \omega + T \nabla S, \quad (1.8)$$

где  $\Phi_E$  — функция, пропорциональная потенциалу электрического поля.

Введем предположение о винтовой симметрии течения, т. е. предположим, что все величины зависят только от двух переменных

$$q_1 = r; \quad q_2 \equiv \theta = \varphi - \alpha z, \quad (1.9)$$

где  $r$ ,  $\varphi$ ,  $z$  — цилиндрические координаты;  $\alpha = \frac{2\pi}{L}$ ;  $L = \text{const}$  — шаг винта (рис. 1).

1. Равенство нулю дивергенции векторов  $\rho \mathbf{v}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{j}_0$  и  $\mathbf{j}$  позволяет ввести «функции тока»  $\psi_0$ ,  $\psi$ ,  $I_0$  и  $I$ , определяемые равенствами

$$rv_r = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi_0}{\partial \theta}; \quad v_\varphi - arv_z = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi_0}{\partial r}; \quad rH_r = \frac{\partial \psi}{\partial \theta}; \quad (1.10)$$

$$H_\varphi - arH_z = -\frac{\partial \psi}{\partial r};$$

$$rj_{0r} = \frac{\partial I_0}{\partial \theta}; \quad j_{0\varphi} - arj_{0z} = -\frac{\partial I_0}{\partial r}; \quad rj_r = \frac{\partial I}{\partial \theta}; \quad (1.11)$$

$$j_\varphi - arj_z = -\frac{\partial I}{\partial r}.$$

Нетрудно убедиться, что линии тока жидкости лежат на поверхностях  $\psi_0(r, \theta) = \text{const}$ , магнитные силовые линии — на поверхностях  $\psi(r, \theta) = \text{const}$ , линии электрического тока — на поверхностях  $I(r, \theta) = \text{const}$ , а вихревые линии — на поверхностях  $I_0(r, \theta) = \text{const}$ , причем все эти поверхности имеют винтовую симметрию.\*

Функция тока  $\psi$  для магнитного поля выражается через  $A_z$  и  $A_\varphi$  — компоненты векторного потенциала ( $\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}$ )

$$\psi = A_z + arA_\varphi.$$

Величина  $\psi$  пропорциональна магнитному потоку, проходящему через геликоидальную поверхность, образованную нормальными к оси  $z$ , опущенными на винтовую линию, лежащую на рассматриваемой винтовой магнитной поверхности. Действительно, этот поток равен  $\int \mathbf{H} d\mathbf{S} = \oint \mathbf{A} d\mathbf{l} = LA_z + 2\pi rA_\varphi = L\psi$ , где интегрирование производится по контуру  $OABA'O'O$ . Аналогично функция  $\psi_0$  пропорциональна потоку жидкости, протекающему через такую поверхность, а  $I(r, \theta)$  и  $I_0(r, \theta)$  пропорциональны соответственно току и потоку вихря  $\text{rot } \mathbf{v}$  через ту же поверхность.

2. Умножая первое из уравнений (1.8) последовательно на  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{H}$ , получим якобианские равенства  $\frac{\partial(\psi_0, \Phi_E)}{\partial(r, \theta)} = 0$  и  $\frac{\partial(\psi, \Phi_E)}{\partial(r, \theta)} = 0$ , из которых следует, что  $\Phi_E = \Phi_E(\psi)$  и  $\psi = \psi(\psi_0)$ , т. е. магнитные поверхности являются эквипотенциальными и жидкость течет по этим поверхностям. Не отдавая предпочтения ни одной из функций  $\psi$  и  $\psi_0$ , введем новую переменную  $\xi$  [2], нормировка

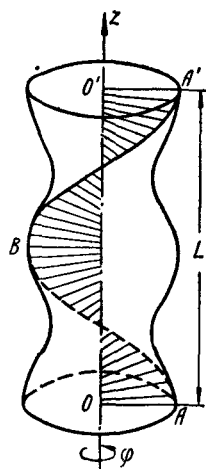


Рис. 1.

\* Их можно представлять себе состоящими из винтовых линий с постоянным шагом  $L$ ; в плоскости же, перпендикулярной к оси  $z$ , сечение этих поверхностей может быть произвольным. На рис. 1, например, изображена винтовая поверхность, нормальное сечение которой является эллипсом.

которой пока остается произвольной. Таким образом, будем считать, что

$$\psi = \psi(\xi); \quad \psi_0 = \psi_0(\xi). \quad (1.12)$$

3. Из определений векторов  $\mathbf{j}_0$  и  $\mathbf{j}$  вытекает, что  $I_0$  и  $I$  пропорциональны винтовым составляющим  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{H}$ :

$$I_0 = v_z + \alpha r v_\varphi; \quad I = H_z + \alpha r H_\varphi, \quad (1.13)$$

а также и то, что справедливы следующие выражения для соответствующих комбинаций компонент  $\mathbf{j}_0$  и  $\mathbf{j}$ :

$$j_{0z} + \alpha r j_{0\varphi} = -\frac{\beta}{\varrho} \Delta^* \psi_0 + \frac{1}{\varrho^2} (\nabla \varrho \nabla \psi_0) + \frac{2\alpha}{\beta} I_0; \quad (1.14)$$

$$j_z + \alpha r j_\varphi = -\beta \Delta^* \psi + \frac{2\alpha}{\beta} I.$$

Здесь введены обозначения

$$\Delta^* \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{r}{\beta} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}; \quad \beta \equiv 1 + \alpha^2 r^2.$$

4. Из первого уравнения (1.8) следует якобианное уравнение

$$\frac{\partial \left( \psi, \frac{I_0}{\beta} \right)}{\partial (r, \theta)} = \frac{\partial \left( \psi_0, \frac{I}{\beta \varrho} \right)}{\partial (r, \theta)}. \quad (1.15)$$

5. Второе уравнение (1.8) дает еще одно якобианное равенство

$$\frac{\partial (\psi, I)}{\partial (r, \theta)} = \frac{\partial (\psi_0, I_0)}{\partial (r, \theta)}. \quad (1.16)$$

Из уравнений (1.16) и (1.15) вытекает соответственно, что

$$I_0 \psi'_0 - I \psi' = A(\xi); \quad I \frac{\psi'_0}{\varrho} - I_0 \psi' = \beta B(\xi). \quad (1.17)$$

Штрихом здесь и далее обозначена производная по  $\xi$ ;  $A$  и  $B$  — произвольные функции, зависящие только от  $\xi$ , или по терминологии, принятой в работе [9], — «поверхностные величины».

Разрешая уравнения (1.17) относительно  $I_0$  и  $I$ , получим

$$I_0 = \frac{1}{s} \left( A \frac{\psi'_0}{\varrho} + \beta B \psi' \right); \quad I = \frac{1}{s} (A \psi' + \beta B \psi'_0), \quad (1.18)$$

где

$$s \equiv \frac{\psi_0'^2}{\varrho} - \psi'^2. \quad (1.19)$$



6. Преобразуя поперечные компоненты второго уравнения (1. 18), приходим к системе

$$\frac{\partial}{\partial q_i} \left( \omega + \frac{\beta B^2}{s} \right) = D \frac{\partial \xi}{\partial q_i} + Q \frac{\partial \varrho}{\partial q_i}, \quad (1. 20)$$

где

$$D = \frac{1}{\varrho} \left\{ \frac{\psi'_0}{\varrho} \Delta^* \psi_0 - \frac{\psi'_0}{\beta \varrho^3} (\nabla \varrho \nabla \psi_0) - \psi' \Delta^* \psi \right\} + \\ + \frac{1}{2\beta \varrho} \frac{\partial A^2}{\partial \xi} \frac{1}{s} + \frac{\beta}{2} \frac{\partial B^2}{\partial \xi} \frac{1}{s} - \frac{2\alpha A}{\beta^2 \varrho} + TS'; \quad Q = - \frac{AB\psi'_0 \psi'}{\varrho^2 s^2},$$

а частная производная по  $\xi$  берется при постоянной плотности  $\varrho$ . Из уравнения (1. 20) получаем

$$\frac{\partial(D, \xi)}{\partial(r, \theta)} = - \frac{\partial(Q, \varrho)}{\partial(r, \theta)}. \quad (1. 21)$$

Отсюда, так как  $Q = Q(\varrho, \xi)$ , следует, что  $\frac{\partial(D, \xi)}{\partial(r, \theta)} = \frac{\partial Q}{\partial \xi} \frac{\partial(\varrho, \xi)}{\partial(r, \theta)}$ . Переходя к переменным  $\varrho$  и  $\xi$  от  $r$  и  $\theta$ , получим уравнение  $\frac{\partial D}{\partial \varrho} = \frac{\partial Q}{\partial \xi}$ , интегрирование которого дает

$$D = - \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{AB\psi'_0}{\varrho s \psi'} + U'(\xi), \quad (1. 22)$$

где  $U'(\xi)$  — произвольная функция  $\xi$ . Функция  $U(\xi)$  может быть определена из уравнения (1. 20), поскольку

$$d \left( \omega + \frac{\beta B^2}{s} \right) = D d\xi + Q d\varrho = d \left( - \frac{AB\psi'_0}{\varrho s \psi'} + U \right). \quad (1. 23)$$

Интегрируя уравнение (1. 23) и преобразуя выражения  $\Delta^* \psi_0$  и  $\Delta^* \psi$  в формуле (1. 20) к переменной  $\xi$ , окончательно получаем

$$\frac{s}{\varrho} \Delta^* \xi + \frac{1}{2\beta \varrho} \frac{\partial s}{\partial \xi} (\nabla \xi)^2 - \frac{\psi_0'^2}{\beta \varrho^3} (\nabla \varrho \nabla \xi) + \frac{1}{2\beta \varrho} \frac{\partial A^2}{\partial \xi} \frac{1}{s} + \\ + \frac{\beta}{2} \frac{\partial B^2}{\partial \xi} \frac{1}{s} - \frac{2\alpha A}{\beta^2 \varrho} + \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{AB\psi'_0}{\varrho s \psi'} + TS' - U' = 0; \quad (1. 24)$$

$$\omega = - \frac{\beta B^2}{s} - \frac{AB\psi'_0}{\varrho s \psi'} + U. \quad (1. 25)$$

Соотношение (1. 25) позволяет, в принципе, выразить  $\varrho$ , которое входит также в уравнение (1. 24), через  $\xi$  и ее частные производные по  $r$  и  $\theta$  [см. уравнения (1. 4) — (1. 5)]. Таким образом, исходная система уравнений для стационарного винтового течения идеально проводящей жидкости в магнитном поле сводится к одному уравнению (1. 24) для  $\xi$ . Это уравнение нелинейное и содержит шесть произвольных функций  $\xi$ :  $\psi_0$ ,  $\psi$ ,  $A$ ,  $B$ ,  $S$  и  $U$

В задаче о винтовых волнах, которые могут распространяться в первоначально круглом плазменном цилиндре, эти функции определяются невозмущенными распределениями плотности  $\varrho(r)$ , скорости  $\mathbf{v}(r)$  и магнитного поля  $\mathbf{B}(r)$ .

Полная система уравнений, описывающая стационарные течения идеально проводящей жидкости, обладающие *винтовой симметрией*, имеет вид \*

$$\left. \begin{aligned} \frac{s}{\varrho} \Delta^* \xi + \frac{1}{2\beta\varrho} \frac{\partial s}{\partial \xi} (\nabla \xi)^2 - \frac{\psi_0'^2}{\beta\varrho^3} (\nabla\varrho \nabla \xi) + \frac{1}{2\beta\varrho} \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{A^2}{s} + \\ + \frac{\beta}{2} \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{B^2}{s} + \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{AB\psi_0'}{\varrho s \psi'} - \frac{2\alpha A}{\beta^2 \varrho} + TS' - U' = 0; \\ W + \frac{v^2}{2} + \Phi = -\frac{\beta B^2}{s} - \frac{AB\psi_0'}{\varrho s \psi'} + U; \\ r \begin{pmatrix} v_r \\ H_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_0'/\varrho \\ \psi' \end{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial \theta}, \quad \begin{pmatrix} v_\varphi \\ H_\varphi \end{pmatrix} - \alpha r \begin{pmatrix} v_z \\ H_z \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \psi_0'/\varrho \\ \psi' \end{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial r}; \\ \begin{pmatrix} v_z \\ H_z \end{pmatrix} + \alpha r \begin{pmatrix} v_\varphi \\ H_\varphi \end{pmatrix} = \frac{A}{s} \begin{pmatrix} \psi_0'/\varrho \\ \psi' \end{pmatrix} + \frac{\beta B}{s} \begin{pmatrix} \psi' \\ \psi_0' \end{pmatrix}. \end{aligned} \right\} \quad (I)$$

Здесь  $s \equiv \frac{\psi_0'^2}{\varrho} - \psi'^2$ ; штрих означает полную производную по  $\xi$ ; частная производная по  $\xi$  берется при фиксированном  $\varrho$ ;

$$\Delta^* \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}.$$

Уравнения *аксиально-симметричных течений* ( $\xi = \xi(r, z)$ ) получаются отсюда предельным переходом при  $\alpha \rightarrow \infty$ . Таким образом, мы получаем следующую систему:

$$\left. \begin{aligned} \frac{s}{\varrho} \Delta^* \xi + \frac{1}{2\varrho r^2} \frac{\partial s}{\partial \xi} (\nabla \xi)^2 - \frac{\psi_0'^2}{r^2 \varrho^3} (\nabla\varrho \nabla \xi) + \frac{1}{2\varrho r^2} \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{A^2}{s} + \\ + \frac{r^2}{2} \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{B^2}{s} + \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{AB\psi_0'}{\varrho s \psi'} + TS' - U' = 0; \\ W + \frac{v^2}{2} + \Phi = -\frac{r^2 B^2}{s} - \frac{AB\psi_0'}{\varrho s \psi'} + U; \\ r \begin{pmatrix} v_r \\ H_r \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \psi_0'/\varrho \\ \psi' \end{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial z}; \quad r \begin{pmatrix} v_z \\ H_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_0'/\varrho \\ \psi' \end{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial r}; \\ r \begin{pmatrix} v_\varphi \\ H_\varphi \end{pmatrix} = \frac{A}{s} \begin{pmatrix} \psi_0'/\varrho \\ \psi' \end{pmatrix} + \frac{r^2 B}{s} \begin{pmatrix} \psi' \\ \psi_0' \end{pmatrix}. \end{aligned} \right\} \quad (II)$$

\* Поскольку компоненты векторов  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{H}$  выражаются через  $\xi$  весьма симметричными формулами, мы будем записывать их для краткости в матричной форме.

Здесь, так же как и в общем случае (I), величины  $\psi_0$ ,  $\psi$ ,  $A$ ,  $B$ ,  $S$  и  $U$  являются произвольными функциями, зависящими только от  $\xi$ , а оператор  $\Delta^*$  равен

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

В важном частном случае, когда магнитное поле имеет лишь одну  $B_\varphi$  компоненту ( $\psi' = 0$ ), уравнения (II) дают \*

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{q^2} \Delta^* \xi - \frac{1}{r^2 q^3} (\nabla_Q \nabla \xi) + \frac{AA'}{r^2} + q r^2 B B' + T S' - U' &= 0; \\ W + \frac{v^2}{2} + \Phi &= -q r^2 B^2 + U; \\ r v_r &= -\frac{1}{q} \frac{\partial \xi}{\partial z}, \quad r v_z = \frac{1}{q} \frac{\partial \xi}{\partial r}; \quad r v_\varphi = A; \\ H_\varphi &= q r B, \end{aligned} \right\} \quad (II')$$

где  $\xi = \psi_0$ .

Для *плоской задачи*, когда нет зависимости от продольной координаты  $z$ , в обратном предельном случае  $\alpha \rightarrow 0$  получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{s}{q} \Delta \xi + \frac{1}{2q} \frac{\partial s}{\partial \xi} (\nabla \xi)^2 - \frac{\psi_0'^2}{q^3} (\nabla_Q \nabla \xi) + \frac{1}{2q} \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{A^2}{s} + \\ + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{B^2}{s} + \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{AB \psi_0'}{qs \psi'} + T S' - U' &= 0; \\ W + \frac{v^2}{2} + \Phi &= -\frac{B^2}{s} - \frac{AB \psi_0'}{qs \psi'} + U; \\ r \begin{pmatrix} v_r \\ H_r \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \psi_0'/q \\ \psi' \end{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial \varphi}; \quad \begin{pmatrix} v_\varphi \\ H_\varphi \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \psi_0'/q \\ \psi' \end{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial r}; \\ \begin{pmatrix} v_z \\ H_z \end{pmatrix} &= \frac{A}{s} \begin{pmatrix} \psi_0'/q \\ \psi' \end{pmatrix} + \frac{B}{s} \begin{pmatrix} \psi' \\ \psi_0' \end{pmatrix}, \end{aligned} \right\} \quad (III)$$

где  $\Delta$  — оператор Лапласа,  $\xi = \xi(r, \varphi)$ . Легко написать соответствующие уравнения также и в декартовой системе координат  $\xi = \xi(x, y)$ , при этом в системе (III) изменятся только выражения для поперечных компонент  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{H}$ :

$$\begin{pmatrix} v_x \\ H_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_0'/q \\ \psi' \end{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial y}; \quad \begin{pmatrix} v_y \\ H_y \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \psi_0'/q \\ \psi' \end{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x}.$$

За исключением § 6, мы ограничимся далее рассмотрением волн лишь в случае несжимаемой жидкости, для которого все

\* Член, содержащий  $\psi'$  в знаменателе, как легко можно видеть из вывода (1. 24), в этом случае исчезает.

полученные выше уравнения существенно упрощаются. Критерием применимости модели несжимаемой жидкости, как и в обычной гидродинамике, является условие малости скорости по сравнению со скоростью звука.

Выпишем полную систему уравнений винтового течения для того случая, когда жидкость можно рассматривать как несжимаемую. В этом случае  $\rho = \text{const}$  и уравнение (1.24) содержит только одну неизвестную функцию  $\xi$ . Полагая плотность  $\rho$  равной единице,  $W = p$ ,  $S = \text{const}$ , и обозначая

$$\frac{A}{s} \equiv a; \quad \frac{B}{s} \equiv b; \quad U - \frac{AB\psi'_0}{s\psi'} \equiv -su,$$

получим согласно системе уравнений (I) уравнения *винтового течения* в виде [10]:

$$s\Delta^*\xi + \frac{s'}{2\beta} (\nabla\xi)^2 + \frac{1}{2\beta} (a^2s)' + \frac{\beta}{2} (b^2s)' - \frac{2\alpha as}{\beta^2} + (us)' = 0; \quad (1.26)$$

$$p + \frac{v^2}{2} + \Phi = -s(u + \beta b^2); \quad s = \psi_0'^2 - \psi'^2; \quad (1.27)$$

$$r \begin{pmatrix} v_r \\ H_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi'_0 \\ \psi' \end{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial \theta}; \quad \begin{pmatrix} v_\varphi \\ H_\varphi \end{pmatrix} - \alpha r \begin{pmatrix} v_z \\ H_z \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \psi'_0 \\ \psi' \end{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial r}; \quad (1.28)$$

$$\begin{pmatrix} v_z \\ H_z \end{pmatrix} + \alpha r \begin{pmatrix} v_\varphi \\ H_\varphi \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} \psi'_0 \\ \psi' \end{pmatrix} + \beta b \begin{pmatrix} \psi' \\ \psi'_0 \end{pmatrix}.$$

Здесь  $\psi_0$ ,  $\psi$ ,  $a$ ,  $b$  и  $u$  — функции  $\xi$ , которые могут быть заданы произвольно. Нормировка функции  $\xi$  может быть выбрана различным способом в зависимости от удобства решения той или иной задачи. Можно, например, следуя В. Ткаличу, определить  $\xi$  из требования  $s = \text{const}$ , т. е. из уравнения

$$\psi_0'^2 - \psi'^2 = s = \text{const}. \quad (1.29)$$

При этом уравнение (1.26) существенно упрощается, и мы получаем

$$\Delta^*\xi + \frac{aa'}{\beta} + \beta bb' - \frac{2\alpha a}{\beta^2} + u' = 0. \quad (1.30)$$

Однако в общем случае к уравнению (1.30) добавляется сложное уравнение (1.29), и поэтому для решения ряда задач удобнее, по-видимому, пользоваться непосредственно уравнением (1.26). В частности ниже, при рассмотрении винтовых волн, мы будем использовать другую связь  $\xi$  с функциями тока  $\psi_0$  и  $\psi$ . Член  $\frac{2\alpha}{\beta^2} as$  в уравнении (1.26) характерен для собственно винтовой симметрии; в обоих предельных случаях как аксиальной ( $\alpha \rightarrow \infty$ ), так и трансляционной симметрии ( $\alpha \rightarrow 0$ ), он исчезает.

В качестве частных случаев из уравнений (1. 29) — (1. 30) получаются:

1. Уравнение для винтовых равновесных магнитогидродинамических конфигураций [6, 7] ( $\psi_0 = I_0 = 0$ , откуда следует, что  $s = -1$ ,  $\xi = \psi$ ,  $a = I$ ,  $b = 0$ ,  $u = w$ )

$$\Delta^* \psi + \frac{1}{2\beta} \frac{dI^2}{d\psi} - \frac{2aI}{\beta^2} + \frac{dw}{d\psi} = 0; \quad (1. 31)$$

$$\omega = p + \Phi.$$

2. Уравнение для винтовых течений обычной гидродинамики для несжимаемой жидкости ( $\psi = I = 0$ , т. е.  $s = 1$ ,  $\xi = \psi_0$ ,  $a = I_0$ ,  $b = 0$ ,  $u = -w$ )

$$\Delta^* \psi_0 + \frac{1}{2\beta} \frac{dI_0^2}{d\psi_0} - \frac{2aI_0}{\beta^2} - \frac{dw}{d\psi_0} = 0; \quad (1. 32)$$

$$\omega = p + \frac{v^2}{2} + \Phi.$$

В этих уравнениях функции  $w$  ( $\psi$ ) и  $I$  ( $\psi$ ) [или  $w$  ( $\psi_0$ ) и  $I_0$  ( $\psi_0$ )] могут быть заданы произвольно.

Из уравнений (1. 28) следует, что величины квадратов скорости и напряженности магнитного поля представляются в виде

$$v^2 = \frac{\psi_0'^2}{\beta} (\nabla \xi)^2 + \frac{1}{\beta} (a\psi' + \beta b\psi')^2; \quad (1. 33)$$

$$H^2 = \frac{\psi'^2}{\beta} (\nabla \xi)^2 + \frac{1}{\beta} (a\psi' + \beta b\psi_0')^2.$$

Соответственно величина «полного давления» равна

$$p + \frac{H^2}{2} + \Phi = -\frac{s}{2\beta} (\nabla \xi)^2 - \frac{a^2 s}{2\beta} - \frac{\beta b^2 s}{2} - us. \quad (1. 34)$$

Соотношения (1. 33) и (1. 34) будут использованы ниже для вывода граничных условий на свободной поверхности плазмы.

Отметим в заключение, что для вывода соотношений (1. 26) — (1. 28) достаточно предположить что плотность  $\rho$  постоянна на магнитных поверхностях  $\psi(r, \theta) = \text{const}$  [10]. При этом  $\mathbf{v}$  следует заменить на  $\sqrt{\rho} \mathbf{v}$ , где  $\mathbf{v}$  — скорость жидкости, а  $\rho$  — ее плотность.

Приведем теперь для полноты уравнения для аксиально-симметричных и плоских течений несжимаемой идеально проводящей жидкости [1—3], которые получаются из соотношений (1. 26) — (1. 28) предельными переходами  $\alpha \rightarrow \infty$  и  $\alpha \rightarrow 0$ .

А. Для аксиально-симметричных течений, когда нет зависимости от азимута  $\varphi$ , из уравнений (1. 26) — (1. 28) получаем:

$$s\Delta^*\xi + \frac{s'}{2r^2}(\nabla\xi)^2 + \frac{1}{2r^2}(a^2s)' + \frac{r^2}{2}(b^2s)' + (us)' = 0; \quad (1. 35)$$

$$s = \psi_0'^2 - \psi'^2; \quad p + \frac{v^2}{2} + \Phi = -s(u + r^2b^2); \quad (1. 36)$$

$$r \begin{pmatrix} v_r \\ H_r \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \psi_0' \\ \psi' \end{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial z}; \quad r \begin{pmatrix} v_z \\ H_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_0' \\ \psi' \end{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial r};$$

$$r \begin{pmatrix} v_\varphi \\ H_\varphi \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} \psi_0' \\ \psi' \end{pmatrix} + r^2b \begin{pmatrix} \psi' \\ \psi_0' \end{pmatrix}, \quad (1. 37)$$

где  $\psi_0$ ,  $\psi$ ,  $a$ ,  $b$  и  $u$  — произвольные функции, зависящие только от  $\xi$ , а оператор  $\Delta^*$  равен  $\Delta^* \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ .

Уравнения аксиально-симметричных магнитогидродинамических течений (1. 35) — (1. 37) можно рассматривать как обобщение соответствующих уравнений для равновесных плазменных конфигураций ( $\mathbf{v} = 0$ ) или для течений несжимаемой жидкости без магнитного поля ( $\mathbf{H} = 0$ ). Для этих случаев уравнение (1. 35) переходит в уравнения:

1. Для  $\mathbf{v} = 0$ ;  $\omega = p + \Phi$ :

$$\Delta^*\psi + \frac{1}{2r^2} \frac{dI^2}{d\psi} + \frac{d\omega}{d\psi} = 0. \quad (1. 38)$$

2. Для  $\mathbf{H} = 0$ ;  $\omega = p + \frac{v^2}{2} + \Phi$ :

$$\Delta^*\psi_0 + \frac{1}{2r^2} \frac{dI_0^2}{d\psi_0} - \frac{d\omega}{d\psi_0} = 0. \quad (1. 39)$$

Величины  $I_0 = r v_\varphi$ ,  $I = r H_\varphi$  и  $\omega$  являются произвольными функциями от  $\psi_0$  или, соответственно, от  $\psi$ . Для аксиально-симметричной задачи  $\psi$  определяется  $A_\varphi$  компонентой векторного потенциала  $\psi = r A_\varphi$ , и пропорциональна магнитному потоку, проходящему через поперечное сечение магнитной поверхности  $\psi = \text{const}$ . Аналогично  $\psi_0$  пропорциональна потоку жидкости внутри поверхности  $\psi_0 = \text{const}$ .

Б. Для плоской задачи, когда отсутствует зависимость от продольной координаты  $z$ , из уравнений (1. 26) — (1. 28) при  $\alpha \rightarrow 0$  находим:

$$s\Delta\xi + \frac{s'}{2}(\nabla\xi)^2 + \frac{1}{2}(a^2s') + \frac{1}{2}(b^2s)' + (us)' = 0; \quad (1. 40)$$

$$s = \psi_0'^2 - \psi'^2; \quad p + \frac{v^2}{2} + \Phi = -s(u + b^2); \quad (1. 41)$$

$$r \begin{pmatrix} v_r \\ H_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_0' \\ \psi' \end{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial \varphi}; \quad \begin{pmatrix} v_\varphi \\ H_\varphi \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \psi_0' \\ \psi' \end{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial r};$$

$$\begin{pmatrix} v_z \\ H_z \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} \psi_0' \\ \psi' \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} \psi' \\ \psi_0' \end{pmatrix}. \quad (1. 42)$$

Как видно из соотношений (1. 42), величины  $v_z$  и  $H_z$  для плоского течения несжимаемой жидкости зависят только от  $\xi$ .

Полученные выше соотношения позволяют рассмотреть возможные типы симметричных магнитогидродинамических течений. Однако мы ограничимся далее лишь более специальной задачей, а именно рассмотрением винтовых волн, которые могут распространяться в круглом плазменном цилиндре.

## § 2. Винтовые волны

Рассмотрим винтовые волны, распространяющиеся в круглом плазменном цилиндре и вызывающие деформацию его первоначально цилиндрических магнитных поверхностей. Пусть в невозмущенном состоянии цилиндр имеет заданное распределение магнитного поля  $B_z = B_z(r)$ ,  $B_\phi = B_\phi(r)$  и скоростей  $v_z = v_z(r)$ ,  $v_\phi = v_\phi(r)$  (плазменная струя) и удерживается внешним магнитным полем, также имеющим компоненты  $B_{ze}(r)$  и  $B_{\phi e}(r)$  (рис. 2).

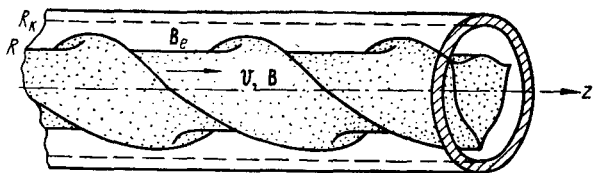


Рис. 2.

Задача о распространении винтовых волн установившегося вида в плазменном цилиндре со свободной границей  $r = R$  сводится к одному, вообще говоря, нелинейному уравнению для функции  $\xi$ , которая должна удовлетворять нелинейному граничному условию на его возмущенной поверхности  $\xi = \xi_z = \text{const}$ , вытекающему из баланса давлений. Мы ограничимся рассмотрением только установившихся волн, которые в движущейся со скоростью  $v_\phi$  системе координат представляются стационарными винтовыми течениями. Спецификой волн, отличающей их от произвольных стационарных течений, является возможность изменения амплитуды волн вплоть до нуля, или, точнее, наличие невозмущенного состояния — цилиндрической струи. Математически это означает, что уравнение, описывающее такие волны, должно содержать также решение, соответствующее наличию цилиндрических магнитных поверхностей и отвечающее отсутствию волн.

1. В равновесном состоянии  $\mathbf{H} = \mathbf{H}(r)$  и  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(r)$  величина  $\xi = \bar{\xi}$  также должна быть функцией только  $r$ . Выберем ее равной

$$\bar{\xi} = \frac{r^2}{2}. \quad (2. 1)$$

При таком выборе функции  $\bar{\xi}(r)$  невозмущенные функции тока  $\psi_0$  и  $\psi$  определяются уравнениями [см. уравнения (1. 28)]:

$$d\psi_0 = J_0(r) r dr, \quad d\psi = J(r) r dr, \quad (2. 2)$$

где через  $J_0$  и  $J$  обозначены равновесные величины

$$J_0 = \alpha v_z - \frac{v_\varphi}{r}; \quad J = \alpha H_z - \frac{H_\varphi}{r}. \quad (2. 3)$$

Полагая в уравнении (1. 26)  $\xi = \xi(r)$  и подставляя туда величину  $us$ , полученную из соотношения (1. 27), получим следующее уравнение для распределения равновесного давления внутри плазменного цилиндра \*

$$\frac{d}{dr} \left( p + \frac{H^2}{2} \right) + \frac{1}{r} (H_\varphi^2 - v_\varphi^2) = 0. \quad (2. 4)$$

Распределение полей в невозмущенном состоянии может быть задано произвольно, при этом выражения для компонент плотности тока определяются формулами

$$j_\varphi = -\frac{\partial H_z}{\partial r}; \quad j_z = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r H_\varphi; \quad (2. 5)$$

аналогичные соотношения получаются и для компонент  $j_0 = \text{rot } \mathbf{v}$ .

2. Если вдоль плазменного цилиндра распространяется винтовая волна, то магнитное поле вне плазмы также получает некоторое винтовое возмущение. В системе координат, где движение жидкости представляется стационарным течением, внешнее магнитное поле не зависит явно от времени и обладает винтовой симметрией. Для описания этого поля удобно также воспользоваться функцией тока  $\psi_e(r, \theta)$ , поскольку граничное условие касательности  $H_e$  на возмущенной поверхности плазмы записывается с ее помощью наиболее просто ( $\psi_e|_\Sigma = \text{const}$ ). Уравнение, которому удовлетворяет функция  $\psi_e(r, \theta)$  для внешнего безвихревого магнитного поля, можно получить из общих уравнений (1. 26)—(1. 28), полагая в них  $\xi = \psi_e$ , а  $\mathbf{v}$  и  $p$  равными нулю. Таким образом, получаем

$$\Delta^* \psi_e - \frac{2\alpha}{\beta^2} I_e = 0; \quad (2. 6)$$

$$r H_{re} = \frac{\partial \psi_e}{\partial \theta}; \quad \alpha r H_{ze} - H_{\varphi e} = \frac{\partial \psi_e}{\partial r}; \quad H_{ze} + \alpha r H_{\varphi e} = I_e. \quad (2. 7)$$

Здесь  $I_e$  является функцией только от  $\psi_e$ . Вид этой функции определяется невозмущенным состоянием; в невозмущенном состоянии продольное поле  $H_z$  однородно, а азимутальное  $H_{\varphi e} = H_{\varphi R} \frac{R}{r}$ , откуда следует, что  $I_e = \text{const}$ . Полагая

$$\psi_e = \bar{\psi}_e + \tilde{\psi}_e = H_{ze} \frac{\alpha r^2}{2} - H_{\varphi e} r \ln r + \tilde{\psi}_e, \quad (2. 8)$$

\* Здесь и далее считаем  $\Phi = 0$ , т. е. силами неэлектромагнитного происхождения пренебрегаем.



получим, что  $\tilde{\psi}_e$  удовлетворяет однородному уравнению  $\Delta^* \tilde{\psi}_e = 0$ , решения которого, периодические по  $\varphi$ , имеют вид  $\psi_e = f_e(r) \cos m\theta$ , где функция  $f_e$  для  $m$ -ой моды определяется уравнением

$$\left(\frac{r}{\beta} f_e'\right)' - \frac{m^2}{r} f_e = 0. \quad (2.9)$$

Решения (2.9) выражаются через производные бесселевых функций мнимого аргумента:  $f_e(r) = A_e r I'_m(amr) + B_e r K'_m(amr)$ .

Таким образом, внешнее магнитное поле имеет винтовые магнитные поверхности  $\psi_e(r, \theta) = \text{const}$ , одну из которых можно отождествить с возмущенной поверхностью плазменной струи. Линейные волны распадаются на отдельные гармоники, с каждой из которых можно свить одну из гармоник внешнего поля  $\psi_{me}$ . В случае же нелинейных волн для удовлетворения граничных условий требуется, вообще говоря, набор гармоник.

3. При выводе уравнения для функции  $\xi$ , описывающей винтовые волны внутри плазменного цилиндра, мы используем далее то обстоятельство, что  $\psi_0(\xi)$ ,  $\psi(\xi)$ ,  $a(\xi)$ ,  $b(\xi)$  и  $u(\xi)$  являются поверхностными величинами, и вид этих функциональных зависимостей должен быть одинаковым для возмущенного и равновесного состояния.

Поскольку  $\bar{\xi} = \frac{r^2}{2}$ , то используя инвариантность функций  $\psi_0(\xi)$  и  $\psi(\xi)$ , из соотношений (2.2) для равновесного состояния найдем, что  $\psi_0(\xi)$  и  $\psi(\xi)$  определяются уравнениями

$$d\psi_0 = J_{0\xi} d\xi; \quad d\psi = J_\xi d\xi. \quad (2.10)$$

Индекс  $\xi$  внизу означает, что данная величина берется в равновесном состоянии и вместо аргумента  $r$  в нее подставляется  $\sqrt{2\xi}$ . Соответственно, для  $s(\xi)$  получаем выражение

$$s = J_{0\xi}^2 - J_\xi^2. \quad (2.11)$$

Волновое уравнение для  $\xi$  получим из уравнения (1.26), используя теперь то обстоятельство, что величина  $u$  является функцией только от  $\xi$  и, следовательно, также может быть определена из равновесного состояния. Полагая в уравнении (1.26)  $\xi = \bar{\xi} = \frac{r^2}{2}$ , определим  $(us)'$  (отмечая, аналогично предыдущему, индексом  $\xi$  равновесные величины) и вычтем его из того же уравнения (1.26). После некоторых несложных, но громоздких преобразований, получим следующее уравнение для  $\tilde{\xi} = \xi - \frac{r^2}{2}$ :

$$\Delta^* \tilde{\xi} + \frac{rs'}{\beta s} \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial r} + \left\{ -\frac{4\alpha^2 a_1}{\beta^2 s} + \frac{4\alpha^2 a_1^2}{\beta s^2} + \frac{2a_1'}{\beta s} + \frac{1}{s} \left( \frac{a_1^2 - b_1^2}{s} \right)' \right\} \tilde{\xi} + \frac{s'}{2\beta s} (\nabla \tilde{\xi})^2 + \frac{2\alpha^2}{\beta s} \left( \frac{a_1^2}{s} \right)' \tilde{\xi}^2 = 0. \quad (2.12)$$

Здесь штрих означает производную по  $\xi$ , а через  $a_1$  и  $b_1$  обозначены функции  $\xi$ , равные

$$a_1 = \left( J_0 \frac{\partial \varphi}{r} - J \frac{H_\varphi}{r} \right)_{\xi}; \quad b_1 = \left( J_0 \frac{H_\varphi}{r} - J \frac{\partial \varphi}{r} \right)_{\xi}. \quad (2.13)$$

Таким образом, вид уравнения (2.12) определяется равновесным распределением магнитного поля  $\mathbf{H}(r)$  и скоростей  $\mathbf{v}(r)$  внутри плазменного цилиндра. Полученное уравнение является линейным только в том случае, когда  $s$  и  $a_1$  постоянны. Последнее реализуется, если  $\bar{v}_\varphi \sim r$ ,  $\bar{v}_z = \text{const}$ ,  $\bar{H}_\varphi \sim r$  и  $\bar{H}_z = \text{const}$ , т. е. для цилиндра с однородным продольным током, вращающегося как целое вокруг своей оси. В этом случае уравнение для  $\tilde{\xi}$  линейно

$$\Delta^* \tilde{\xi} - \left( -\frac{4\alpha^2 a_1}{\beta^2 s} + \frac{4\alpha^2 a_1^2}{\beta s^2} \right) \tilde{\xi} = 0, \quad (2.14)$$

а его решения, периодические по  $\varphi$ , имеют вид

$$\tilde{\xi} = f(r) \cos m\theta, \quad (2.15)$$

где  $f(r)$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{r} \left( \frac{r}{\beta} f' \right)' - \left( \frac{\varepsilon^2}{\beta} - \frac{2\alpha\varepsilon}{\beta^2} - \frac{m^2}{r^2} \right) f = 0, \quad (2.16)$$

в котором  $\varepsilon = \frac{2\alpha a_1}{s} = \text{const}$ . Решения (2.16) выражаются через бесселевы функции:

$$f(r) = \varepsilon J_m(\chi r) - \chi \alpha r J'_m(\chi r); \quad \chi^2 = \varepsilon^2 - \alpha^2 m^2. \quad (2.17)$$

В рассматриваемом случае задача о волнах внутри плазменного цилиндра решается до конца.

При произвольном равновесном распределении магнитного поля и скоростей уравнение (2.12) является, вообще говоря, нелинейным. Легко, однако, написать соответствующее линеаризованное уравнение. При этом  $\tilde{\xi}$  считаем малой величиной и отбрасываем в уравнении (2.12) квадратичные по  $\tilde{\xi}$  величины. Кроме того, в  $s$ ,  $a_1$  и  $b_1$  можно положить  $\xi \simeq \bar{\xi} = \frac{r^2}{2}$  и заменить производную  $\frac{d}{d\xi} \simeq \frac{1}{r} \frac{d}{dr}$ . Таким образом, мы получим линейное уравнение для  $\tilde{\xi}$ , периодические решения которого также имеют вид выражения (2.15), причем радиальные части  $f(r)$  удовлетворяют уравнению

$$\left( \frac{rs}{\beta} f' \right)' - \left[ -\frac{m^2 s}{r} - \frac{4\alpha^2 r a_1^2}{\beta s} - \left( \frac{2a_1}{\beta} - \frac{v_\varphi^2}{r^2} - \frac{H_\varphi^2}{r^2} \right) \right] f = 0. \quad (2.18)$$

Коэффициенты этого уравнения являются известными функциями  $r$ , определяющимися равновесным распределением магнитного поля и скоростей. Для случая покоящегося плазменного цилиндра ( $v_\varphi = 0$ ,  $v_z = \frac{\omega}{k}$ ) уравнения, эквивалентные уравнению (2. 18), были получены в работах [14, 15].

4. В общем случае функция  $\xi$  должна удовлетворять нелинейному уравнению (2. 12), условию конечности внутри плазменного цилиндра и условию  $\xi = \text{const}$  на возмущенной границе цилиндра. Последнее условие обеспечивает касательность как скорости, так и внутреннего магнитного поля на поверхности  $\Sigma$  идеально проводящей плазмы. Кроме того, на этой поверхности должно выполняться условие равенства давлений  $p + \frac{H^2}{2} = \frac{H_e^2}{2}$ . Поскольку внешнее магнитное поле  $H_e$  описывается функцией тока  $\psi_e$ , то  $\psi_e$  также должна быть постоянной  $\psi_e/\Sigma = \text{const}$  на границе плазмы с внешним полем и должна удовлетворять соответствующим граничным условиям на внешних проводниках или диэлектриках, если таковые имеются, или же условию убывания при  $r \rightarrow \infty$ , если рассматривается плазменный шнур в свободном пространстве.

Согласно соотношениям (1. 27)—(1. 28) давление внутри и вне плазмы выражается формулами

$$p + \frac{H^2}{2} = -\frac{s}{2} \left\{ \frac{1}{\beta} (\nabla \xi)^2 + \frac{a^2}{\beta} + \beta b^2 + 2u \right\};$$

$$\frac{H_e^2}{2} = \frac{1}{2\beta} (\nabla \psi_e)^2 + \frac{J_e^2}{2\beta}, \quad (2. 19)$$

поэтому учитывая, что  $s$  и  $u$  являются функциями  $\xi$  и, следовательно, постоянны на границе плазмы  $\Sigma$ , запишем граничное условие равенства давлений в виде

$$s \left\{ \frac{1}{\beta} (\nabla \xi)^2 + \frac{a^2}{\beta} + \beta b^2 \right\}_\Sigma + \left\{ \frac{1}{\beta} (\nabla \psi_e)^2 + \frac{J_e^2}{\beta} \right\}_\Sigma = \text{const}.$$

Преобразуем это соотношение, выразив  $\xi$  и  $\psi_e$  через возмущения  $\tilde{\xi}$  и  $\tilde{\psi}_e$ . В результате получим

$$s \left\{ \frac{1}{\beta} (\nabla \tilde{\xi})^2 + \frac{2r}{\beta} \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial r} + \left( \frac{2a_1}{\beta} + \frac{a_1^2 - b_1^2}{s} \right) \frac{2\tilde{\xi}}{s} + \frac{4a^2 a_1^2}{\beta s^2} \tilde{\xi}^2 \right\}_\Sigma + \left\{ \frac{1}{\beta} (\nabla \tilde{\psi}_e)^2 + \frac{2J_e r}{\beta} \frac{\partial \tilde{\psi}_e}{\partial r} + H_{\varphi e}^2 \right\}_\Sigma = \text{const}. \quad (2. 20)$$

Здесь  $a_1$ ,  $b_1$  и  $s$  — известные функции  $\xi$ , определенные равенствами (2. 11) и (2. 13),  $J_e = \alpha H_{ze} - \frac{H_{\varphi e}}{r}$ , где  $H_{ze} = \text{const}$  и  $H_{\varphi e} = \frac{H_{\varphi R R}}{r}$  — невозмущенные компоненты внешнего магнитного поля.

Таким образом, на свободной границе плазмы с магнитным полем должны выполняться три условия:  $\xi_{\Sigma} = \text{const}$ ,  $\psi_{e\Sigma} = \text{const}$  и условие (2. 20). Граничное условие (2. 20) всегда нелинейно, поэтому задача о волнах в плазменном шнуре со свободной границей может быть точно решена только численными методами. Специфичным здесь является задание граничных условий на неизвестной (искомой) границе. Для аналогичной задачи о стационарных нелинейных волнах на плоской поверхности тяжелой жидкости в обычной гидродинамике доказаны теоремы существования [11—13], однако эффективное решение даже этих более простых задач получается только с помощью приближенных методов.

Граничные условия для  $\tilde{\xi}$  [удовлетворяющего уравнению (2. 12)] существенно упрощаются, если плазменный цилиндр касается внутренней поверхности идеально проводящего полого металлического цилиндра при  $r = R$ . В этом случае  $\tilde{\xi}$  должно удовлетворять только одному простому граничному условию  $\tilde{\xi}|_R = 0$ , и задача о волнах в таком плазменном цилиндре может быть решена точно, если уравнение (2. 12) линейно [см. уравнение (2. 14)].

В случае малых колебаний линеаризованные граничные условия сводятся к одному условию для функции  $f(r)$ , определяемой уравнением (2. 18). Действительно, линейные волны представляются суперпозицией гармоник вида

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{r^2}{2} + f(r) \cos m\theta; \\ \psi_e &= H_{ze} \frac{ar^2}{2} - H_{\varphi e} r \ln r + f_e(r) \cos m\theta, \end{aligned} \quad (2. 21)$$

и можно рассматривать отдельно распространение каждой такой гармоники. Граничные условия, согласно выражению (2. 20), можно записать в виде

$$\xi_{\Sigma} = \text{const}; \quad \psi_{e\Sigma} = \text{const}; \quad sP_{i\Sigma} + P_{e\Sigma} = \text{const}, \quad (2. 22)$$

где  $P_i$  и  $P_e$  с точностью до линейных по  $\tilde{\xi}$  и  $\tilde{\psi}_e$  членов равны

$$\begin{aligned} P_i &= \frac{2r}{\beta} \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial r} + \left( \frac{4a_1}{\beta s} + \frac{2}{s} \frac{v_{\varphi}^2 - H_{\varphi}^2}{r^2} \right) \tilde{\xi}; \\ P_e &= \frac{H_{\varphi R}^2 R^2}{r^2} + \frac{2rJ_e}{\beta} \frac{\partial \tilde{\psi}_e}{\partial r}. \end{aligned} \quad (2. 23)$$

Граница  $\Sigma$  плазменного цилиндра с внешним магнитным полем имеет уравнение

$$r = R + \varrho_1 \cos m\theta, \quad (2. 24)$$

где  $Q_1 = \text{const}$ , так же как и  $\tilde{\xi}$ , является величиной первого порядка малости. С учетом выписанных соотношений граничные условия (2. 22) в первом приближении дают

$$\begin{aligned} RQ_1 + f &= 0; \\ RJ_e Q_1 + f_e &= 0; \\ s \left\{ \frac{2R}{\beta} f' + \left( \frac{4a_1}{\beta s} + \frac{2}{s} \frac{v_\varphi^2 - H_\varphi^2}{R^2} \right) f \right\} - \frac{2H_{\varphi e}^2}{R} Q_1 + \frac{2RJ_e}{\beta} f'_e &= 0. \end{aligned} \quad (2. 25)$$

Отсюда, исключая  $Q_1$ , окончательно получаем граничное условие для функции  $f(r)$ :

$$(J_0^2 - J^2) \frac{Rf'}{f} + J_e^2 \frac{Rf'_e}{f_e} + \beta \left( \frac{2a_1}{\beta} + \frac{v_\varphi^2 - H_\varphi^2 + H_{\varphi e}^2}{R^2} \right) = 0, \quad (2. 26)$$

в котором все величины берутся на невозмущенной границе  $r = R$ .

Уравнение (2. 18) и граничное условие к нему (2. 26), совместно с условием  $f(0) = 0$ , представляют собой полную систему уравнений для определения фазовой скорости  $v_\varphi$  линейных винтовых волн  $\left[ J_0 = \alpha (v_z^0 + v_\varphi) - \frac{v_\varphi}{r} \right]$ . Поскольку логарифмическая производная  $f_e$  (для внешнего поля) является известной функцией  $r$ , то условие (2. 26) представляет собой линейное краевое условие типа Штурма—Лиувилля, связывающее значение функции  $f(R)$  и ее производной  $f'(R)$ .

5. Все полученные выше соотношения легко обобщить на случай, когда плазменный шнур находится в атмосфере нейтрального газа с давлением  $p_e$ . Рассматривая внешнюю среду как несжимаемую (для скоростей много меньших, чем скорость звука), мы можем полностью использовать развитую выше технику расчета, выбрав функцию тока для внешнего газа также в виде  $\xi_0 = \frac{r^2}{2} + \tilde{\xi}_0$ . Опуская вычисления, аналогичные проделанным выше, приведем лишь линеаризованное уравнение для  $\tilde{\xi}_0 = f_0(r) \cdot \cos m\theta$  и граничное условие, заменяющее (2. 26) для плазменного шнура при учете внешнего давления:

$$\begin{aligned} \left( \frac{rJ_{0e} f'_0}{\beta} \right)' + \left\{ -\frac{m^2 J_{0e}}{r} + \frac{4\alpha^2 v_{\varphi e}^2}{\beta r} + \right. \\ \left. + \left( \frac{2J_{0e} v_{\varphi e}}{\beta r} + \frac{v_{\varphi e}^2}{r^2} \right) \right\} f_0 = 0; \end{aligned} \quad (2. 27)$$

$$\begin{aligned} (J_0^2 - J^2) \frac{Rf'}{f} - J_{0e}^2 \frac{Rf'_0}{f_0} + J_e^2 \frac{Rf'_e}{f_e} + \\ + \beta \left( 2 \frac{a_1 - J_{0e} v_{\varphi} / R}{\beta} + \frac{v_\varphi^2 - v_{\varphi e}^2 - H_\varphi^2 + H_{\varphi e}^2}{R^2} \right) = 0. \end{aligned} \quad (2. 28)$$

Здесь  $J_{0e} = \alpha (v_{ze}^0 + v_\phi) - \frac{v_{\phi e}}{r}$ ;  $v_{ze}(r)$  и  $v_{\phi e}(r)$  — продольная и азимутальная невозмущенные скорости внешнего газа, и все величины в уравнении (2. 28) берутся на границе  $r = R$ .

### § 3. Об устойчивости цилиндрической плазменной струи в магнитном поле

Рассмотрим некоторые применения полученных выше уравнений для исследования устойчивости стационарных плазменных конфигураций. В линейном приближении уравнения, описывающие винтовые волны в круглом плазменном цилиндре, находящемся во внешнем магнитном поле, имеют вид

$$\left(\frac{rs}{\beta} f'\right)' + \left\{-\frac{m^2 s}{r} + \frac{4\alpha^2 r a_1^2}{\beta s} + \left(\frac{2a_1}{\beta} + \frac{v_\phi^2 - H_\phi^2}{r^2}\right)'\right\} f = 0; \quad (3. 1)$$

$$\left(\frac{r}{\beta} f_e'\right)' - \frac{m^2}{r} f_e = 0. \quad (3. 2)$$

Граничное условие при  $r = R$  представляет собой дисперсионное уравнение для определения фазовой скорости  $v_\phi = \frac{\omega}{k}$  отдельных гармоник  $\sim \exp i(kz - m\phi - \omega t)$  винтовых волн:

$$s \frac{rf'}{f} + J_e^2 \frac{rf_e'}{f_e} + \beta \left(\frac{2a_1}{\beta} + \frac{v_\phi^2 - H_\phi^2 + H_{\phi e}^2}{r^2}\right) = 0. \quad (3. 3)$$

Здесь  $s = J_0^2 - J^2$ ;  $ra_1 = J_0 v_\phi - J H_\phi$ ;

$$J_0 = \alpha (v_z + v_\phi) - \frac{v_\phi}{r}; \quad J = \alpha H_z - \frac{H_\phi}{r};$$

$$\beta = 1 + \alpha^2 r^2; \quad \alpha = \frac{k}{m}; \quad v(r) \text{ и } \mathbf{B}(r) = \sqrt{4\pi\sigma} \mathbf{H}(r) -$$

— скорость и напряженность магнитного поля, а индекс  $e$  показывает, что данная величина относится к магнитному полю вне плазменного шнура.

1. Рассмотрим прежде всего плазменный шнур с однородным током, вращающийся как целое вокруг своей оси ( $H_\phi$ ,  $v_\phi \sim r$ ;  $H_z$ ,  $v_z = \text{const}$ ). В этом случае уравнение (3. 1) имеет решение:

$$f = \varepsilon J_m(\chi r) - \alpha \chi r J_m'(\chi r),$$

где  $\chi^2 = \varepsilon^2 - k^2$ ;  $\varepsilon = \frac{2ka_1}{ms} = \text{const}$ .

а. Если шнур оторван от стенки, то дисперсионное уравнение (3. 3) представляется в виде

$$\begin{aligned} & (J_0^2 - J^2) \frac{\chi^2 J_m(\chi R)}{\varepsilon J_m(\chi R) - \alpha \chi R J_m'(\chi R)} + \\ & + J_e^2 \frac{\alpha m^2 F_e(R)}{R F_e'(R)} + \frac{\alpha}{R^2} (v_\phi^2 - H_\phi^2 + H_{\phi e}^2) = 0. \end{aligned} \quad (3. 4)$$

Здесь  $f_e = rF'_e$ , где функция  $F_e(r)$  — удовлетворяет уравнению Бесселя и при наличии идеально проводящего кожуха при  $r = R_k$ , равна

$$F_e(r) = K'_m(kR_k)I_m(kr) - I'_m(kR_k)K_m(kr). \quad (3.5)$$

Ограничиваясь случаем длинноволновых колебаний ( $kR \ll 1$ ;  $\epsilon R \ll 1$ ), получим следующее выражение для фазовой скорости  $v_\phi$ :

$$kv_\phi = (m-1)v_\phi \pm \sqrt{(m-1)(mH_\phi^2 - 2kH_\phi H_z - v_\phi^2) + k^2 H_z^2 - mH_{\phi e}^2 - \frac{m^3 J_e^2 F_e}{F'_e}}. \quad (3.6)$$

Мы положили здесь  $R = 1$ . Из полученного равенства следует, что при  $m = 1$  величины  $H_\phi$  и  $v_\phi$  из дисперсионного уравнения выпадают. Следовательно, как однородный ток [16], так и вращение не влияют на критерий устойчивости по отношению к длинноволновому извиванию шнура  $m = 1$ . Условием устойчивости является требование положительности подкоренного выражения в уравнении (3.6).

Для плазменного шнура без кожуха ( $R_k \rightarrow \infty$ ) критерий устойчивости можно представить в виде

$$k(1 + \epsilon_1^2) \frac{H_z}{H_{\phi e}} > (m-1)\alpha_1 + m\epsilon_1 + \sqrt{(m-1)(1 + \epsilon_1^2)\alpha_2^2 + m\epsilon_1^2[1 - (m-1)\alpha_1^2] - (m-1)(\alpha_1^2 - 2\alpha_1 m\epsilon_1 + m)}. \quad (3.7)$$

где введены обозначения  $\alpha_1 = H_\phi/H_{\phi e}$ ,  $\epsilon_1 = H_{ze}/H_z$  и  $\alpha_2 = v_\phi/H_{\phi e}$ . Для случая покоящегося цилиндра ( $v_\phi = 0$ ) критерий (3.7) получен В. Д. Шафрановым [16]. Выражение (3.7) позволяет видеть, что вращение цилиндра только наращивает величину продольного поля  $H_z$ , необходимую для стабилизации, и следовательно, способствует неустойчивости. В следующем пункте мы покажем, что в случае, когда шнур касается кожуха (при  $r = R$ ), происходит обратное, т. е. вращение цилиндра является необходимым условием его устойчивости. Отметим еще, что для покоящегося цилиндра ( $v_\phi = 0$ ) без поверхностных токов ( $H_z = H_{ze}$ ,  $H_\phi = H_{\phi e}$ ), из выражения (3.7) следует условие устойчивости

$$H_z > \frac{mH_\phi}{kR}, \quad (3.8)$$

или  $J(R) > 0$ . Нетрудно убедиться, что это условие справедливо независимо от значения  $F_e(r)$ , т. е. от наличия или отсутствия кожуха. Кроме того, ниже будет показано, что  $J(R) = 0$  является границей области устойчивости также и в случае произвольного распределения токов внутри плазменного цилиндра.

б. Задача о стационарных волнах в плазменном цилиндре, касающемся идеально проводящей стенки при  $r = R$ , решается точно, так как в рассматриваемом случае однородного тока и однородного вращения линейное уравнение (3. 1) не является приближенным и граничное условие  $f(R) = 0$  также может быть удовлетворено точно.

Используя приведенное в предыдущем пункте выражение для  $f(r)$ , запишем условие  $f(R) = 0$  в виде

$$m \sqrt{k^2 R^2 + x^2} J_m(x) + k R x J_{m+1}(x) = 0. \quad (3. 9)$$

Обозначим корни уравнения (3. 9) через  $\mu_n$  [в случае длинных волн ( $kR \ll 1$ ), например,  $\mu_n$  являются корнями бесселевой функции  $J_m(x)$ ]. Полагая  $x = \kappa R = \mu_n$ , получим для  $J_0$  выражение

$$J_0 = \frac{k v_\varphi}{m \mu_n} \pm \sqrt{J^2 - \frac{2kH_\varphi}{m \mu_n} J + \left(\frac{k v_\varphi}{m \mu_n}\right)^2}. \quad (3. 10)$$

Отсюда следует, что для невращающегося цилиндра ( $v_\varphi = 0$ ) условие устойчивости имеет вид  $J > \frac{2kH_\varphi}{\mu_n}$ . Для длинноволновых колебаний ( $kR \ll 1$ ) оно близко к условию  $J > 0$ , т. е. к критерию устойчивости для случая оторванного от стенки шнура при непрерывности полей  $H_z$  и  $H_\varphi$  на его поверхности.

В случае вращающегося плазменного цилиндра ( $v_\varphi \neq 0$ ), рассматривая подкоренное выражение в формуле (3. 10), как квадратичную форму от  $J$ , получим условие ее положительной определенности  $v_\varphi^2 > H_\varphi^2$ . С другой стороны, условием возможности спадающего по радиусу давления  $p'(r) < 0$  согласно уравнению (2. 4) является  $v_\varphi^2 < 2H_\varphi^2$ . Таким образом, существует интервал скоростей вращения

$$B_\varphi^2 < 4 \quad \text{и} \quad v_\varphi^2 < 2B_\varphi^2, \quad (3. 11)$$

при которых плазменный шнур с параболическим распределением давления, обращаясь в нуль на стенке  $r = R$ , устойчив относительно произвольных винтовых возмущений.

2. Представляет интерес получение локальных критериев устойчивости, не зависящих от граничных условий. Если при некотором распределении внутреннего магнитного поля и скоростей удастся построить локальное решение уравнения (3. 1) при фазовой скорости  $v_\varphi$ , содержащей мнимую часть, то такое распределение неустойчиво. Фазовая скорость входит в уравнении (3. 1) только в  $J_0$ , и следовательно, необходимым условием устойчивости является отсутствие решений уравнения (3. 1) с комплексными  $J_0$ .

а. Ограничимся случаем  $\mathbf{v} \parallel \mathbf{H}$  и рассмотрим окрестность точки  $r = r_s$ , где  $J(r) = 0$ , т. е. возмущение направлено вдоль некоторой внутренней винтовой силовой линии  $\mathbf{H}$ . Предположим, что в точке  $r_s$  величина  $J_0^2(r) < 0$  и достаточно мала по абсолютной



величине, а  $m \gg 1$ . Разлагая уравнение (3. 1) в окрестности  $r = r_s$ , приходим к уравнению

$$\frac{d^2 F}{d\xi^2} + \left\{ -E - \frac{N}{(1 + \xi^2)^2} + \frac{M}{1 + \xi^2} \right\} F = 0, \quad (3. 12)$$

где

$$F = \sqrt{\frac{rs}{\beta}} f; \quad \xi = \frac{\varrho}{\varrho_0} + i \frac{J'_0}{J'}; \quad \varrho = r - r_s;$$

$$\varrho_0^2 = \frac{J_0'^2 J'^2}{(J'^2 - J_0'^2)^2}; \quad E = \frac{m^2 \beta}{r^2} \varrho_0^2;$$

$$N = 1 + \frac{4\alpha^2 H_\Phi^2}{J'^2 r^2}; \quad M = -\frac{2\alpha^2}{r^2} \left( \rho + \frac{v^2}{2} \right)'$$

При действительной переменной  $\xi = x$  условием существования локальных решений уравнения (3. 12) является  $M > 1/4$  [17]. Локальное решение на действительной оси  $\xi = x$  можно аналитически продолжить и в комплексную плоскость  $\xi = x + iy$ . Следовательно, для  $\xi = x + i \frac{J'_0}{J'}$  также существуют локальные решения, если  $|J'_0| < |J'|$ , т. е. если параллельный сдвиг оси  $x$  меньше расстояния до особых точек уравнения (3. 12), расположенных при  $y = \pm i$ . Последнее условие эквивалентно требованию  $v^2 < H^2$ . В развернутой форме необходимое условие устойчивости  $M < \frac{1}{4}$  имеет вид

$$\frac{8\pi}{B_z^2} \left( \rho + \frac{\varrho v^2}{2} \right)' + \frac{r}{4} \left( \frac{\mu'}{\mu} \right)^2 \left( 1 - \frac{4\pi \varrho v^2}{B^2} \right) > 0. \quad (3. 13)$$

Здесь  $\mu = \frac{B_\Phi}{r B_z}$  и при выводе учтено условие равновесия (2. 4). Критерий (3. 13) является обобщением критерия устойчивости Сайдема [18] на случай отличных от нуля скоростей  $v^2 < \frac{B^2}{4\pi \varrho}$ , параллельных магнитному полю. При  $B_\Phi \sim r$  он переходит в полученное выше условие  $v_\Phi^2 < B_\Phi^2 / 4\pi \varrho$ .

б. Для частного случая аксиально-симметричных колебаний ( $m = 0$ ) вращающегося плазменного цилиндра без продольного магнитного поля ( $B_z = 0$ ), к которому предыдущее рассмотрение неприменимо, уравнение (3. 1) дает ( $v_\Phi = \frac{\omega}{k}$ ):

$$\left( \frac{1}{r} f' \right)' + \left\{ -\frac{k^2}{r} + \frac{k^2}{\omega^2} \left[ \frac{(r^2 v_\Phi^2)'}{r^4} - \left( \frac{H_\Phi^2}{r^2} \right)' \right] \right\} f = 0. \quad (3. 14)$$

Из общей теории Штурма—Лиувилля [22] следует, что необходимым и достаточным условием существования собственных значений  $\omega^2 > 0$  для краевой задачи  $f(0) = f(R) = 0$  является положительность выражения в квадратных скобках уравнения (3.14). Отсюда получаем следующее условие устойчивости:

$$4 (qr^2 v_\phi^2)' - r^4 (B_\phi^2 / r^2)' > 0, \quad (3.15)$$

которое при  $B_\phi = 0$  переходит в известный критерий устойчивости Релея, а при  $B_\phi \sim r$  и  $v_\phi \sim r$  — в условие  $v_\phi^2 > 0$ , которое может быть получено и из конкретного решения соответствующей задачи (для  $m = 0$ ,  $B_z = 0$ ). Критерий (3.15), так же как и (3.14), определяется внутренними параметрами и не зависит от граничных условий на поверхности плазменного цилиндра. Он может быть получен и на основе анализа баланса сил [19], действующих на выделенный элемент объема плазмы.

3. Из граничного условия (3.3) в случае непрерывности полей на свободной поверхности плазмы (т. е. при отсутствии поверхностных токов) следует, что  $J(R) \equiv \frac{kH_z}{m} - \frac{H_\phi}{R} = 0$  представляет собой границу области устойчивости. Действительно, пусть  $J$  и  $v_\phi$  достаточно малы, тогда, пренебрегая в уравнении (3.3) их квадратами и полагая  $H_\phi = H_{\phi e}$  и  $H_z = H_{ze}$ , получим

$$J_0 \simeq -\frac{v_\phi}{R^2} \frac{f}{f'} \pm \sqrt{\frac{2H_\phi f}{R^2 f'}} J. \quad (3.16)$$

Величина  $J_0$ , а следовательно, и фазовая скорость  $v_\phi$  получают мнимую часть, когда  $J$  переходит через нуль. Таким образом, при

$$B_z = \frac{mB_\phi}{kR} \quad (3.17)$$

возникает неустойчивость которая развивается на поверхности плазменного цилиндра при  $\mathbf{k} \parallel \mathbf{B}$ . Этот результат не зависит от распределения внутреннего магнитного поля, а следовательно, и от выполнения критерия Сайдема. В рассматриваемом случае, когда отсутствуют поверхностные токи, винтовые силовые линии внутреннего и внешнего магнитных полей не перекрещиваются на границе плазменного цилиндра, и плазма имеет возможность просачиваться наружу, раздвигая силовые линии магнитного поля\*. В § 5 путем учета нелинейных членов будет показано, что плазма действительно образует «узкие» языки, направленные вдоль винтовых силовых линий на поверхности плазменного цилиндра.

\* Из соотношения (2.28) следует, что такая «поверхностная» неустойчивость возникает также и при наличии внешнего нейтрального газа.

#### § 4. Нелинейные длинноволновые аксиально-симметричные колебания плазменного цилиндра

В настоящем параграфе рассматриваются аксиально-симметричные волны в плазменном цилиндре, расположенном внутри коаксиального с ним идеально проводящего кожуха (рис. 3). Предполагается, что длина волны велика по сравнению с радиусом кожуха, в то время как амплитуда колебаний поверхности плазменного цилиндра может быть и не малой по сравнению с его радиусом.

Пусть в невозмущенном состоянии плазменный цилиндр покоится, а внутреннее ( $B_z$ ) и внешнее ( $B_{ze}$ ) магнитные поля —

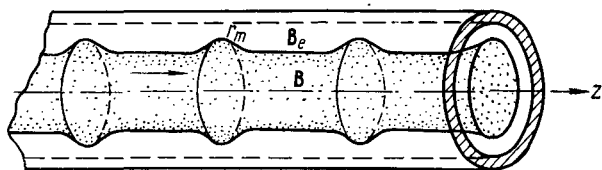


Рис. 3.

однородны, и имеется продольный поверхностный ток, который вне плазменного цилиндра создает азимутальное магнитное поле  $B_{\phi a} \frac{a}{r}$ . В рассматриваемом случае функции тока  $\psi_0(r, z)$  для поля скоростей и  $\psi_e(r, z)$  для внешнего магнитного поля (в системе координат, движущейся вместе с волной) удовлетворяют линейному уравнению

$$r \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0, \quad (4.1)$$

причем  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{H}_e$  выражаются через  $\psi_0$  и  $\psi_e$  посредством соотношений

$$\begin{aligned} r v_z &= \frac{\partial \psi_0}{\partial r}; & r v_r &= -\frac{\partial \psi_0}{\partial z}; \\ r H_z &= \frac{\partial \psi_e}{\partial r}; & r H_r &= -\frac{\partial \psi_e}{\partial z}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

а внутреннее магнитное поле описывается функцией  $\psi_i$ , пропорциональной  $\psi_0$ . Нетрудно убедиться, что в случае однородного (невозмущенного) магнитного поля соответствующие стационарные течения являются безвихревыми и бестоковыми ( $\text{rot } \mathbf{v} = \text{rot } \mathbf{H} = 0$ ).

Для приближенного определения  $\psi$  будем считать, что  $\psi = \psi(r, \varepsilon z)$ , где  $\varepsilon$  — малый параметр, и решение уравнения (4.1) будем искать в виде ряда по  $\varepsilon$ . Оказывается, что этот ряд содержит

только четные степени  $\varepsilon$ . Методом последовательных приближений, удерживая члены порядка  $\varepsilon^2$  включительно, находим  $\psi = \psi^{(0)} + \psi^{(1)} + \dots$ , где

$$\begin{aligned} \psi^{(0)} &= fr^2 + f_1; & \psi^{(1)} &= -f'' \frac{r^4}{8} - \\ & & & - f_1'' \frac{r^2}{4} (\ln r^2 - 1) + f_2 \frac{r^2}{2} + f_3, \end{aligned} \quad (4.3)$$

а  $f_i = f_i(z)$  — произвольные функции  $z$ .

Для определения линий тока жидкости (или магнитных силовых линий внутреннего поля) разложение (4.3) должно быть справедливым в области, включающей ось  $z$ . При этом  $f_1 = f_3 = 0$  из условия конечности при  $r = 0$ , кроме того, положим  $f_2 = 0$ , чтобы скорость на оси  $z$  полностью описывалась функцией  $f$ . Отсюда

$$\psi_0(r, z) = f_0(z) r^2 - f_0''(z) \frac{r^4}{8} + \dots, \quad (4.4)$$

$$\text{где } f_0(z) = \left. \frac{v_z}{2} \right|_{r=0}.$$

Для определения магнитных поверхностей внешнего поля необходимо потребовать, чтобы цилиндр  $r = 1$  \* также был магнитной поверхностью, т. е.  $H_r|_{r=1} = 0$ . Тогда  $f_1 = -f$  и  $f_2 = 1/2 f''$  — из условия, что поле при  $r = 1$  описывается только функцией  $f$ , а  $f_3 = 1/8 f'''$  — из граничного условия при  $r = 1$ , и следовательно, получаем

$$\psi_e(r, z) = f_e(z) (r^2 - 1) + \frac{1}{4} f_e''(z) \left\{ r^2 \ln r^2 - \frac{1}{2} (r^4 - 1) \right\}, \quad (4.5)$$

$$\text{где } f_e(z) = \left. \frac{H_z}{2} \right|_{r=1}.$$

Уравнения  $\psi(r, z) = \text{const}$  являются уравнениями аксиально-симметричных магнитных поверхностей с осевой силовой линией  $r = 0$  в первом случае (4.4) и с цилиндрической магнитной поверхностью  $r = 1$  во втором случае (4.5), с точностью до членов  $\sim \varepsilon^2$  включительно. Они содержат произвольные функции  $f_0(z)$  и  $f_e(z)$ , определяемые распределением продольного поля соответственно при  $r = 0$  и  $r = 1$ .

Пусть искомая поверхность плазменного цилиндра в движущейся вместе с волной системе координат определяется уравнением  $r = r(z)$ . Тогда согласно разложениям (4.4) и (4.5) в нулевом приближении  $f_0(z) = \frac{\psi_0}{r^2}$  и  $f_e(z) = \frac{\psi_e}{r^2 - 1}$ , где  $\psi_0 = \text{const}$

\* Радиус кожуха принимаем за единицу.

и  $\psi_e = \text{const}$  — значения  $\psi_0(r, z)$  и  $\psi_e(r, z)$  на поверхности  $r = r(z)$ . Подставляя эти выражения в уравнения (4. 4) и (4. 5), найдем в следующем приближении

$$f_0 = \psi_0 \left\{ \frac{1}{r^2} + \frac{r^2}{8} \left( \frac{1}{r^2} \right)'' \right\}; \quad f_e = \psi_e \left\{ \frac{1}{r^2 - 1} - \frac{2r^2 \ln r^2 - (r^4 - 1)}{8(r^2 - 1)} \left( \frac{1}{r^2 - 1} \right)'' \right\}. \quad (4. 6)$$

Определим теперь квадраты скорости и внешнего магнитного поля, выразив их также через  $r(z)$ . С принятой точностью (с учетом внешнего азимутального поля) получим

$$v^2 = 2\psi_0^2 \left\{ \frac{2}{r^4} + \frac{r''}{r^3} - \frac{r'^2}{r^4} \right\}; \quad (4. 7)$$

$$H_e^2 = 2\psi_e^2 \left\{ \frac{2}{(1 - r^2)^2} + \frac{2 \ln r^2 + (1 - r^2)(3 - r^2)}{(1 - r^2)^4} r r'' - \frac{2(1 - r^2)^3 + (1 + 3r^2)[2 \ln r^2 + (1 - r^2)(3 - r^2)] r'^2}{(1 - r^2)^5} \right\} + H_{\varphi a}^2 \frac{a^2}{r^2}. \quad (4. 8)$$

Дифференциальное уравнение для границы  $r = r(z)$  плазменного цилиндра с внешним магнитным полем получается из условия баланса давлений на этой границе:  $v^2 - H_i^2 + H_e^2 = P = \text{const}$ . Подставив в его левую часть выражения (4. 7) и (4. 8), приходим к дифференциальному уравнению второго порядка для  $r(z)$ . Это уравнение имеет интегрирующий множитель  $r r'$ . Обозначая через  $a$  значение  $r$  в экстремуме  $r(z)$  и выражая постоянную  $P$  через вторую производную  $r''_a$  в точке  $r = a$ , путем однократного интегрирования получаем

$$\begin{aligned} r'^2 \left\{ \psi_0^2 - \psi_i^2 + \psi_e^2 r^4 \frac{2 \ln r^2 + (1 - r^2)(3 - r^2)}{(1 - r^2)^4} \right\} = \\ = \frac{2(r^2 - a^2)^2}{a^4} \left\{ \psi_0^2 - \psi_i^2 - \psi_e^2 \frac{a^4 r^2}{(1 - a^2)^2 (1 - r^2)} + \right. \\ \left. + \frac{H_{\varphi a}^2 a^4 r^2}{4} \frac{r^2 - a^2 - a^2 \ln r^2 / a^2}{(r^2 - a^2)^2} + \frac{r''_a a r^2}{2(r^2 - a^2)} \left[ \psi_0^2 - \right. \right. \\ \left. \left. - \psi_i^2 + \psi_e^2 a^4 \frac{2 \ln a^2 + (1 - a^2)(3 - a^2)}{(1 - a^2)^4} \right] \right\}. \quad (4. 9) \end{aligned}$$

В полученном уравнении (4. 9) для профиля волны постоянные  $\psi_0$ ,  $\psi_i$  и  $\psi_e$  определяют потоки жидкости внутреннего и внешнего магнитных полей, а величина  $r''_a$  характеризует кривизну профиля в экстремуме  $r = a$ . Нетрудно убедиться, что ограниченные решения этого уравнения либо периодические, либо имеют вид уединенной волны, т. е. одиночного горба или впадины.

Для получения уравнения, описывающего уединенную волну (рис. 4), потребуем, чтобы радиус  $r = a$  достигался при  $z = \pm\infty$ , где  $r'_a = r''_a = 0$ . При этом, согласно разложениям (4. 4) и (4. 5),  $\psi_0$ ,  $\psi_i$  и  $\psi_e$  выражаются через значения невозмущенных величин скорости и магнитных полей (при  $z = \pm\infty$ ,  $r = a$ ):

$$\psi_0 = v_z \frac{a^2}{2}; \quad \psi_i = H_{zi} \frac{a^2}{2}; \quad \psi_e = H_{ze} \frac{a^2 - 1}{2}. \quad (4. 10)$$

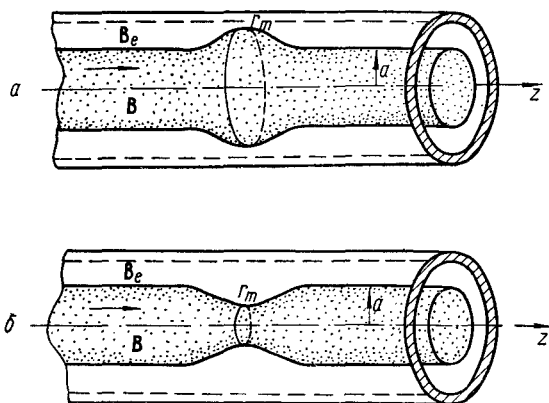


Рис. 4.

Величина  $v_z$  является фазовой скоростью волны. Уравнение для профиля уединенной волны получается в виде

$$\begin{aligned} r'^2 \left\{ v_z^2 - H_{zi}^2 + H_{ze}^2 \frac{(1-a^2)^2}{a^4} \frac{2 \ln r^2 + (1-r^2)(3-r^2)}{(1-r^2)^4} r^4 \right\} = \\ = \frac{2(r^2-a^2)^2}{a^4} \left\{ v_z^2 - H_{zi}^2 - H_{ze}^2 \frac{r^2}{1-r^2} + \right. \\ \left. + H_{\varphi a}^2 \frac{r^2 - a^2 - a^2 \ln r^2/a^2}{(r^2 - a^2)^2} r^2 \right\}. \end{aligned} \quad (4. 11)$$

Фазовую скорость как периодических, так и уединенных волн можно определить, приравняв нулю правые части уравнений (4. 9) и (4. 11) в точке второго экстремума решения  $r = r_m$  (отличного от  $r = a$ ). Эта скорость зависит от величин обоих экстремумов  $a$  и  $r_m$  и от кривизны профиля волны  $r''_a$  в экстремуме  $r = a$ . Величины  $\psi_0$ ,  $\psi_i$  и  $\psi_e$  для периодических волн выражаются через фазовую скорость  $v_z$  и невозмущенные поля  $H_{zi}$  и  $H_{ze}$  теми же формулами (4. 10), что и для уединенной волны, если вместо  $a$  подставить невозмущенный радиус цилиндра  $R$ . Однако при заданных величинах экстремумов  $a$  и  $r_m$  величина  $R$  остается неопределенной, и в этом смысле существует трудность в определении фа-

звой скорости \* и невозмущенных магнитных полей. Поэтому при рассмотрении периодических волн целесообразно оперировать непосредственно с потоками  $\psi_0, \psi_i, \psi_c$ , которые являются однозначно определенными величинами. Мы ограничимся далее для простоты рассмотрением лишь уединенных волн. Фазовая скорость их определяется выражением

$$v_z^2 = H_{zi}^2 + H_{ze}^2 \frac{r_m^2}{1-r_m^2} - H_{\varphi a}^2 r_m^2 \frac{r_m^2 - a^2 - a^2 \ln r_m^2/a^2}{(r_m^2 - a^2)^2}. \quad (4.12)$$

При заданных магнитных полях  $v_z^2$  зависит от радиуса плазменного цилиндра  $a$  и от величины экстремума  $r_m$ . Область существования стационарных волн имеет границу  $v_z^2 = 0$ , за которой действительных  $v_z$  не существует. Из выражения (4.12) следует, что при достаточно больших амплитудах возмущения всегда может быть достигнута граница области устойчивости  $v_z = 0$ .

Исследование уравнения (4.11) показывает, что помимо границы, определяемой обращением в нуль фазовой скорости  $v_z$ , имеются еще границы области существования решения, связанные с заострениями гребней или впадин волн. На рис. 5 изображена область существования уединенных волн для случая  $H_{zi} = 0$  и  $H_{\varphi a} = 0$ . Наклонные прямые представляют собой ось  $r = 0$  и кожух  $r = 1$ , при приближении к которым горба или впадины волны они «заостряются», в чем нетрудно убедиться,

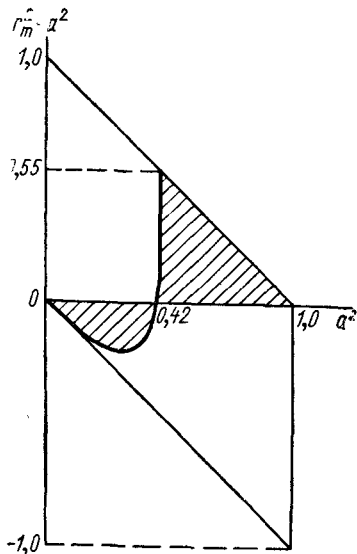


Рис. 5.

вычислив вторую производную  $r(z)$  в точке  $r_m$ . Очевидно, что угол при вершине волны образоваться не может, и полученный результат указывает только на соответствующую тенденцию, так как используемое приближение предполагает гладкость профиля волны. Кроме того, на рис. 5 показана граница области существования волн, которая определяется уравнением

$$\frac{a^4}{(1-a^2)^2} = - \frac{r_m^2}{(1-r_m^2)^3} [2 \ln r_m^2 + (1-r_m^2)(3-r_m^2)], \quad (4.13)$$

при приближении к которой волны также заостряются. Кривая  $r_m^2 - a^2$  пересекает ось абсцисс в точке  $a^2 \simeq 0,42$ . Если радиус

\* Аналогичная трудность возникает и в обычной гидродинамике [8], при построении теории так называемых кноудальных волн.

плазменного цилиндра меньше 0,65 радиуса кожуха, то может распространяться только перетяжка, если же  $a > 0,65$ , то может распространяться только вздутие. В окрестности  $a \simeq 0,65$  заостряются волны даже малой амплитуды, причем заостряется либо горб, либо впадина, в зависимости от того,  $a > 0,65$  или  $a < 0,65$ . При наличии продольного тока ( $H_{\varphi a} \neq 0$ ) критический радиус плазменного цилиндра увеличивается [21].

Заострение волн малой амплитуды для магнитогидродинамических поверхностных волн является характерным явлением, не имеющим аналога в обычной гидродинамике. Как отмечалось выше, заострение волн наблюдается также при возникновении «поверхностной» неустойчивости плазменного шнура в отсутствие поверхностных токов. В следующем параграфе мы рассмотрим нелинейные винтовые волны, причем методом расчета будет разложение по малой амплитуде волны. Однако оба метода исследования (как примененный в этом параграфе, так и метод разложения по амплитуде) позволяют лишь выявить положение заострений волн, но не дают возможности их детально проанализировать.

## § 5. Нелинейные винтовые волны

Рассмотрим теперь влияние конечности амплитуды для случая винтовых волн, распространяющихся в плазменном цилиндре со свободной поверхностью. Будем считать, что основной гармоникой является  $m$ -ая гармоника, которая имеет первый порядок малости,  $2m$ -ая гармоника имеет второй порядок малости и т. д. Для нахождения поправки к фазовой скорости, определяющей влияние нелинейности на устойчивость, необходимо вести вычисления с точностью до третьего приближения. Мы ограничимся сначала учетом лишь членов второго порядка малости, что позволит определить положение заострений профиля волны, а затем, ограничиваясь частным случаем скинированного плазменного цилиндра, определим поправку к фазовой скорости линейного приближения.

1. В общем случае равновесного распределения скоростей  $v(r)$  и магнитного поля  $\mathbf{V}(r)$  функции тока  $\xi$  и  $\psi_e$  должны удовлетворять уравнениям (2. 12) и (2. 6). Представим  $\xi(r, \theta)$  и  $\psi_e(r, \theta)$  в виде сумм гармоник

$$\xi = \frac{r^2}{2} + f_m(r) \cos m\theta + f_{2m}(r) \cos 2m\theta + \dots; \quad (5. 1)$$

$$\psi_e = f_{0e}(r) + f_{me}(r) \cos m\theta + f_{2me}(r) \cos 2m\theta + \dots,$$

где  $f_m$  и  $f_{me}$  — величины  $\sim \varepsilon$ , а  $f_{2m}$  и  $f_{2me} \sim \varepsilon^2$ . Граничные условия для  $\xi$  и  $\psi_e$  имеют вид

$$\xi_{\Sigma} = \text{const}; \quad \psi_{e\Sigma} = \text{const}; \quad sP_{i\Sigma} + P_{e\Sigma} = \text{const} \quad (5. 2)$$



и должны удовлетворяться на границе  $\Sigma$  плазменного цилиндра с внешним магнитным полем. Уравнение этой границы представим в виде

$$r = R + \varrho_1 \cos m\theta + \varrho_2 \cos 2m\theta + \dots, \quad (5.3)$$

где соответственно  $\varrho_1 \sim \varepsilon$ ,  $\varrho_2 \sim \varepsilon^2$  и т. д. Величина  $s = s(\xi)$  постоянна на поверхности  $\Sigma$ , а  $P_i$  и  $P_e$  равны

$$P_i = \frac{2r}{\beta} \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial r} + N \tilde{\xi} + \dots; \quad (5.4)$$

$$P_e = \frac{H_{\varphi R}^2 R^2}{r^2} + \frac{2f'_{0e}}{\beta} \cdot \frac{\partial \tilde{\psi}_e}{\partial r} + \dots$$

Здесь не выписаны члены  $\sim \tilde{\xi}_e^2$ ,  $\tilde{\psi}_e^2$  и более высоких порядков малости, а  $f'_{0e}$  и  $N$  соответственно равны  $f'_{0e} = rJ_e(r)$ ;  $N = \frac{4a_1}{\beta s} + \frac{2}{s} \frac{v_{\varphi}^2 - H_{\varphi}^2}{r^2}$ , где  $a_1$  и  $s$  определены в § 2.

С точностью до членов порядка  $\varrho_1^2$  включительно на границе (5.3) имеем следующие выражения для величин, входящих в граничные условия (5.2):

$$\left. \begin{aligned} \xi_{\Sigma} &= (R\varrho_1 + f_m) \cos m\theta + (R\varrho_2 + f_{2m} + \alpha_2) \times \\ &\quad \times \cos 2m\theta + \dots; \\ \psi_{e\Sigma} &= (f'_0\varrho_1 + f_{me}) \cos m\theta + (f'_{0e}\varrho_2 + f_{2me} + \alpha_{2e}) \times \\ &\quad \times \cos 2m\theta + \dots; \\ P_{i\Sigma} &= \left( \frac{2R}{\beta} f'_m + Nf_m \right) \cos m\theta + \\ &\quad + \left( \frac{2R}{\beta} f'_{2m} + f_{2m}N + \beta_2 \right) \cos 2m\theta + \dots; \\ P_{e\Sigma} &= \left( -\frac{2H_{\varphi e}^2}{R} \varrho_1 + \frac{2f'_{0e}}{\beta} f'_{me} \right) \cos m\theta + \\ &\quad + \left( -\frac{2H_{\varphi e}^2}{R} \varrho_2 + \frac{2f'_{0e}}{\beta} f'_{2me} + \beta_{2e} \right) \cos 2m\theta + \dots \end{aligned} \right\} \quad (5.5)$$

Здесь все величины берутся при  $r = R$ ;  $\alpha_2$ ,  $\alpha_{2e}$ ,  $\beta_2$  и  $\beta_{2e}$  являются величинами второго порядка малости и не содержат характеристик второй гармоники. Для определения положения заострений волн конкретные выражения для этих величин нам не понадобятся.

Подставляя выражения (5.5) в граничные условия (5.2) получаем:

1. В первом приближении:

$$\left. \begin{aligned} RQ_1 + f_m = 0; \quad f'_{0e}Q_1 + f_{me} = 0; \\ s \left( \frac{2R}{\beta} f'_m + N f_m \right) - \frac{2H_{\varphi e}^2}{R} Q_1 + \frac{2f'_{0e}}{\beta} f'_{me} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.6)$$

Исключая  $Q_1$ , находим дисперсионное соотношение для линейных волн

$$sR \frac{f'_m}{f_m} + J_e^2 R \frac{f'_{me}}{f_{me}} + \beta \left( \frac{2a_1}{\beta} + \frac{v_{\varphi}^2 - H_{\varphi}^2 + H_{\varphi e}^2}{R^2} \right) = 0, \quad (5.7)$$

которое было получено также в § 2.

2. Во втором приближении:

$$\left. \begin{aligned} RQ_2 + f_{2m} + \alpha_2 = 0; \quad f'_{0e}Q_2 + f_{2me} + \alpha_{2e} = 0; \\ s \left( \frac{2R}{\beta} f'_{2m} + N f_{2m} + \beta_2 \right) - \frac{2H_{\varphi e}^2}{R} Q_2 + \\ + \frac{2f'_{0e}}{\beta} f'_{2me} + \beta_{2e} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.8)$$

Отсюда для амплитуды второй гармоники волны на поверхности цилиндра получаем

$$Q_2 = \frac{\Gamma}{D}, \quad (5.9)$$

где

$$\begin{aligned} \Gamma = s \left\{ \beta_2 - \left( \frac{2R}{\beta} \frac{f'_{2m}}{f_{2m}} + N \right) \alpha_2 \right\} + \\ + \left\{ \beta_{2e} - \frac{2J_e R}{\beta} \frac{f'_{2me}}{f_{2me}} \alpha_{2e} \right\}; \end{aligned} \quad (5.10)$$

$$\begin{aligned} D = \frac{2R}{\beta} \left\{ sR \frac{f'_{2m}}{f_{2m}} + J_e^2 R \frac{f'_{2me}}{f_{2me}} + \beta \times \right. \\ \left. \times \left( \frac{2a_1}{\beta} + \frac{v_{\varphi}^2 - H_{\varphi}^2 + H_{\varphi e}^2}{R^2} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Обращение  $D$  в нуль и определяет положение заострений волн на поверхности плазмы. Величина, стоящая в фигурных скобках выражения (5.11), отличается от левой части дисперсионного уравнения линейных волн (5.7) только заменой логарифмических производных  $\frac{f'_m}{f_m}$  и  $\frac{f'_{me}}{f_{me}}$  на  $\frac{f'_{2m}}{f_{2m}}$  и  $\frac{f'_{2me}}{f_{2me}}$ . Следовательно, для «среды без дисперсии», когда эти логарифмические производные совпадают, или, если дисперсионное уравнение удовлетворяется при произвольных  $f_m$  и  $f_{me}$ , как, например, в случае

возникновения «поверхностной» неустойчивости ( $J = \frac{k}{m} H_z - \frac{H_\varphi}{R} = 0$ ) при непрерывности полей  $H$ , и  $H_\varphi$  на границе (см. § 3), величина  $D$  обращается в нуль. Таким образом, развитие «поверхностной» неустойчивости связано в общем случае с заострением волн на поверхности цилиндра. Если  $\Gamma$  и  $D$  имеют одинаковые знаки, то заостряются гребни волн; при различных знаках  $\Gamma$  и  $D$  заостряются впадины волн. На конкретном примере волн в плазменном цилиндре с однородным током можно убедиться, что в случае «поверхностной» неустойчивости заостряются именно гребни, так что плазма как бы вытекает узкими языками, ориентированными вдоль магнитных силовых линий на поверхности плазменного цилиндра. Последнее (в случае отсутствия поверхностных токов) справедливо и для основной моды винтовых волн  $m = 1$ . В случае приближения к границе области устойчивости, определяемой критерием Крускала—Шафранова  $B_z = \frac{B_\varphi}{kR}$ , на плазменном шнуре появляются два языка с противоположных его сторон.

Наличие «заострений» делает неприменимым используемый здесь метод расчета и не позволяет исследовать влияние нелинейности на развитие «поверхностной» неустойчивости. Поэтому мы рассмотрим далее лишь случай скинированного плазменного цилиндра с продольным поверхностным током.

II. Рассмотрим плазменный цилиндр, имеющий в равновесном состоянии однородное продольное поле  $B_z$ , продольный поверхностный ток, создающий вне плазмы поле  $B_{\varphi R} \frac{R}{r}$  и азимутальный поверхностный ток, определяющий скачок продольного магнитного поля. В этом случае, как показано в § 2, уравнения для функций тока являются линейными, и трудность решения задачи о нелинейных волнах связана только с удовлетворением нелинейному граничному условию, вытекающему из баланса давлений на свободной границе плазмы с внешним магнитным полем.

Уравнения последовательных приближений получаются аналогично тому, как это сделано в предыдущем пункте, если считать, что основная  $m$ -ая гармоника имеет первый порядок малости,  $2m$ -ая гармоника имеет второй порядок малости,  $3m$ -ая — третий и т. д. При этом, как легко убедиться, выражения для  $3m$ -ой гармоники можно не учитывать, но в выражениях для  $m$ -ой и  $2m$ -ой гармоник (5. 5) следует учесть члены до третьего порядка малости включительно.

1. В первом приближении для рассматриваемого случая получим:

$$f'_0 \varrho_1 - \frac{RF'_m}{m} = 0; \quad f'_e \varrho_1 - \frac{RF'_{me}}{m} = 0; \quad (5. 12)$$

$$\frac{RH_{\varphi e}^2}{m} + t_{me} f_e'^2 + t_m (f_0'^2 - f_i'^2) = 0. \quad (5. 13)$$

Здесь  $f'_i = \alpha R H_{zi}$ ;  $f'_e = \alpha R H_{ze} - H_{\varphi e}$ ;  $f'_0 = \alpha r v_z$ ;  $v_z$  — фазовая скорость волны;  $\alpha = \frac{k}{m}$ ;  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ ;  $\lambda$  — длина волны;  $t_m = \frac{F_m(R)}{F'_m(R)}$ ;  $t_{me} = \frac{F_{me}(R)}{F'_{me}(R)}$ ;  $F_m(r)$  и  $F_{me}(r)$  — функции Бесселя, через которые выражаются решения внутренней и внешней задач, соответственно равные

$$F_m = A_m I_m(kr); F_{me} = A_{me} \{K'_m(kR_k) I_m(kr) - I'_m(kR_k) K_m(kr)\}, \quad (5.14)$$

где  $R_k$  — радиус идеально проводящего кожуха.

Соотношение (5.13) представляет собой дисперсионное уравнение, определяющее в линейном приближении фазовую скорость  $v_z = \frac{\omega}{k}$  распространения  $m$ -ой гармоники винтовой волны.

2. Во втором приближении получаем:

$$f'_0 Q_2 - \frac{RF'_{2m}}{2m} + \alpha_2 = 0; f'_e Q_2 - \frac{RF'_{2me}}{2m} + \alpha_{2e} = 0; \quad (5.15)$$

$$D Q_2 = \Gamma; D = -\frac{RH_{\varphi e}^2}{4m^2} + t_{2me} f_e'^2 + t_{2m} (f_0'^2 - f_i'^2); \quad (5.16)$$

$$\Gamma = -t_{2me} \alpha_{2e} f_e' - \frac{t_{2m} \alpha_2}{f_0'} (f_0'^2 - f_i'^2) + \frac{R^2}{8m^2} \left\{ \beta_{2e} + \frac{\beta_2}{f_0'^2} (f_0'^2 - f_i'^2) \right\}. \quad (5.17)$$

Соотношения (5.16) и (5.17) определяют амплитуду  $Q_2$  второй гармоники волны на поверхности плазменного цилиндра  $r = R$  (в дальнейших формулах положим  $R = 1$ ). Входящие сюда величины  $\alpha_{2e}$ ,  $\beta_{2e}$ ,  $\alpha_2$  и  $\beta_2$  равны

$$\alpha_{2e} = \left( \frac{H_{\varphi e}}{2f_e'} + \frac{1}{4} - \frac{m^2 \beta_{tme}}{2} \right) f_e Q_1^2; \quad \beta_{2e} = \left( \frac{3H_{\varphi e}^2}{2f_e'^2 m^2} - \frac{2H_{\varphi e} t_{me}}{f_e'} - \frac{3}{2} + \frac{m^2 \beta_{tme}^2}{2} \right) m^2 f_e'^2 Q_1^2; \quad (5.18)$$

$$\alpha_2 = \left( \frac{1}{4} - \frac{m^2 \beta_{tm}}{2} \right) f_0 Q_1^2; \quad \beta_2 = \left( -\frac{3}{2} + \frac{m^2 \beta_{tm}^2}{2} \right) m^2 f_0'^2 Q_1^2. \quad (5.19)$$

Исключая из выражения (5.16) фазовую скорость линейных волн с помощью дисперсионного соотношения (5.13), получим следующее выражение для величины  $D$ , обращение которой в нуль определяет положение заострений профиля волны на поверхности:

$$t_m D = (t_m t_{2me} - t_{me} t_{2m}) f_e'^2 - \frac{H_{\varphi e}^2}{4m^2} (4t_{2m} - t_m). \quad (5.20)$$

3. Уравнения третьего приближения, которые получаются приравниванием нулю коэффициентов при  $\cos m\theta$  в граничных условиях (5. 2) при учете величин третьего порядка малости по  $q_1$ , имеют вид

$$\begin{aligned} f'_0 q_1 - \frac{F'_m}{m} + \alpha_3 = 0; \quad f'_e q_1 - \frac{F'_{me}}{m} + \alpha_{3e} = 0; \\ \{2H_{\varphi e}^2 + 2m^2 t_{me} f_e'^2 + 2m^2 t_m (f_0'^2 - f_i'^2)\} q_1 = \\ = -2m^2 t_{me} f_e' \alpha_{3e} + \beta_{3e} + \frac{f_0'^2 - f_i'^2}{f_0'^2} (-2m^2 t_m f_0' \alpha_3 + \beta_3). \end{aligned} \quad (5. 22)$$

Последнее уравнение позволяет найти поправку к фазовой скорости линейных волн. Полагая  $v_z^2 = v_{z,л}^2 + \Delta v_z^2$ , где  $v_{z,л}$  — фазовая скорость линейных волн, определяемая уравнением (5. 13), получим, что левая часть уравнения (5. 22) равна  $\alpha^2 t_m \Delta v_z^2 q_1$ . В результате преобразований правой части уравнения (5. 22) придем к следующему выражению для поправки к квадрату фазовой скорости  $\Delta v_z^2$ :

$$\begin{aligned} \frac{t_m}{q_1} \Delta v_z^2 = 8D \frac{q_2^2}{q_1} + \left\{ -8t_{2me} \bar{\alpha}_{2e}^2 + \frac{m^2 t_{me}^2}{2} (\beta - 3) - \frac{1}{2} \right\} f_e'^2 + \\ + \left\{ -8t_{2m} \bar{\alpha}_2^2 + \frac{m^2 t_m^2}{2} (\beta - 3) - \frac{1}{2} \right\} (f_0'^2 - f_i'^2) - \\ - \frac{3H_{\varphi e}^2}{8} \left( 4\beta - \frac{3}{m^2} \right) - 2H_{\varphi e} f_e' (1 - t_{me}). \end{aligned} \quad (5. 23)$$

Здесь  $\bar{\alpha}_2 = \frac{\alpha_2}{f_0' q_1^2}$ ;  $\bar{\alpha}_{2e} = \frac{\alpha_{2e}}{f_e' q_1^2}$ , где  $\alpha_2$  и  $\alpha_{2e}$  определяются формулами (5. 18) и (5. 19);  $q_2 = \frac{\Gamma}{D}$ , где  $\Gamma$  и  $D$  определены выражениями (5. 16) и (5. 17), а величины  $f_0'$ ,  $f_i'$  и  $f_e'$  связаны дисперсионным уравнением первого приближения (5. 13).

Выражение (5. 23) показывает, что  $\Delta v_z^2$ , вообще говоря, пропорциональна квадрату амплитуды основной ( $m$ -ой) гармоники  $q_1$ , но обращается в бесконечность при  $D \rightarrow 0$ , т. е. при таких значениях параметров, когда происходит заострение волн на поверхности плазменного шнура.

Рассмотрим некоторые частные случаи:

**А. Азимутальные волны.** Случай азимутальных волн, т. е. волн, бегущих по азимуту  $\varphi$  вокруг плазменного цилиндра (рис. 6), получается из общего случая винтовых волн предельным переходом  $\alpha \rightarrow 0$ ,  $\alpha v_z \rightarrow \omega$ , где  $\omega$  — угловая скорость движения гребней азимутальной волны. При получении соответствующих выражений

для азимутальных волн в предыдущих формулах следует положить  $f'_e = -H_{\varphi e}$ ;  $f'_i = 0$ . При этом

$$t_m = \frac{1}{m}; \quad t_{me} = -\frac{1}{m} \frac{x^{2m} + 1}{x^{2m} - 1}; \quad \left(x \equiv \frac{R_k}{R}\right), \quad (5.24)$$

а дисперсионное уравнение линейного приближения принимает вид

$$\omega^2 = \left(-mt_{me} - \frac{1}{m}\right) H_{\varphi e}^2. \quad (5.25)$$

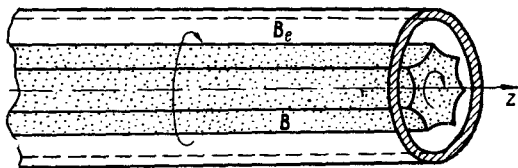


Рис. 6.

Поправка к квадрату угловой скорости  $\omega$  определяется выражением

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \omega^2}{m Q_1^2} = & \frac{8\Gamma^2}{D Q_1^4} + \left\{ -8t_{2me} \bar{\alpha}_{2e}^2 - m^2 t_{2me} - \frac{1}{2} \right\} H_{\varphi e}^2 + \\ & + \left\{ -8t_{2m} \bar{\alpha}_2^2 - m^2 t_{2m} - \frac{1}{2} \right\} \omega^2 + \\ & + \left( \frac{1}{2} - \frac{9}{8m^2} - 2t_{me} \right) H_{\varphi e}^2, \end{aligned} \quad (5.26)$$

где  $\frac{\Gamma}{D} = Q_2$  — амплитуда второй ( $2m$ -ой) гармоники волны на поверхности

$$D = \left( \frac{1}{4m^2} + t_{2me} \right) H_{\varphi e}^2 + t_{2m} \omega^2; \quad (5.27)$$

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma}{Q_1^2} = & \left\{ -t_{2me} \bar{\alpha}_{2e} + \frac{1}{8m^2} \bar{\beta}_{2e} \right\} H_{\varphi e}^2 + \\ & + \left\{ -t_{2m} \bar{\alpha}_2 + \frac{1}{8m^2} \bar{\beta}_2 \right\} \omega^2, \end{aligned} \quad (5.28)$$

а величины

$$\left. \begin{aligned} \bar{\alpha}_2 = \frac{1}{4} - \frac{m}{2}; \quad \bar{\alpha}_{2e} = -\frac{1}{4} - \frac{m^2 t_{me}^2}{2}; \\ \bar{\beta}_2 = -m^2; \quad \bar{\beta}_{2e} = \frac{3}{2} - \frac{3m^2}{2} + 2m^2 t_{me} + \frac{m^4 t_{me}^2}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (5.29)$$

а. В случае плазменного шнура без кожуха  $t_{me} = -\frac{1}{m}$ , и дисперсионное уравнение линейных волн дает

$$\omega^2 = \left(1 - \frac{1}{m}\right) H_{\varphi e}^2, \quad (5.30)$$

т. е. существует безразличное равновесие относительно смещения шнура как целого ( $m = 1$ ) в поперечном направлении и устойчивое равновесие относительно азимутальных волн с  $m > 1$ . Поправка к  $\omega^2$  согласно выражению (5.26) оказывается равной

$$\Delta\omega^2 = -\frac{H_{\varphi e}^2}{m} \{2m(m-2)^2 + 3m - 4\} (m-1) \varrho_1^2. \quad (5.31)$$

При  $m = 1$  эта поправка обращается в нуль, так что, как и следовало ожидать, и в нелинейном приближении шнур находится в безразличном равновесии относительно поперечных смещений. За исключением моды  $m = 1$ , поправка к  $\omega^2$  оказывается отрицательной для любого  $m$ , и следовательно, имеется тенденция к развитию неустойчивости на азимутальных волнах.

б. Если плазменный шнур находится внутри идеально проводящего кожуха, расположенного при  $r = R_k$ , то уравнение первого приближения для  $\omega^2$  имеет вид

$$\omega^2 = \frac{H_{\varphi e}^2}{m} \frac{(m-1)x^{2m} + m + 1}{x^{2m} - 1}. \quad (5.32)$$

В этом случае шнур устойчив относительно азимутальных волн с любым  $m$ , включая  $m = 1$ . Величина

$$D = -\frac{H_{\varphi e}^2}{4m^2} \frac{x^{4m} - 4mx^{2m} - 1}{x^{4m} - 1}. \quad (5.33)$$

Она обращается в нуль, когда  $R = R_{кр}$ , где  $R_{кр} = (2m + \sqrt{2m^2 + 1})^{-\frac{1}{2m}} R_k$ . Следовательно, при таком радиусе плазменного цилиндра происходит «заострение» азимутальных поверхностных волн. Ограничиваясь случаем  $d \equiv R_k - R \ll R$ , для  $\Delta\omega^2$  имеем:

$$\Delta\omega^2 = \frac{13H_{\varphi e}^2}{8md^3} \varrho_1^2. \quad (5.34)$$

Полученная величина положительна, и следовательно, идеально проводящий кожух, достаточно близко расположенный к плазменному цилиндру, стабилизирует нелинейные азимутальные колебания.

**Б. Аксиально-симметричные волны.** Случай аксиально-симметричных волн получается предельным переходом  $a \rightarrow \infty$ ,  $am \rightarrow$

→  $k$  где волновое число  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  является конечной величиной. Для  $t_n$  и  $t_{ne}$  получаем следующие выражения ( $n = 1, 2$ ):

$$t_n = \frac{I_0(nk)}{nkI_1(nk)};$$

$$t_{ne} = \frac{1}{2nk} \frac{I_0(nk)K_1(nkR_k) + I_1(nkR_k)K_0(nk)}{I_1(nk)K_1(nkR_k) - I_1(nkR_k)K_1(nk)}. \quad (5.35)$$

Дисперсионное уравнение линейных волн, пропорциональных  $\cos kz$  принимает вид

$$(v_z^2 - H_z^2)t_1 + H_{ze}^2 t_{1e} + \frac{H_{\Phi e}^2}{k^2} = 0. \quad (5.36)$$

Амплитуда второй гармоники ( $\sim \cos 2kz$ ) определяется формулой  $Q_2 = \Gamma/D$ , где

$$D = (v_z^2 - H_z^2)t_2 + H_{ze}^2 t_{2e} + \frac{H_{\Phi e}^2}{4k^2}; \quad (5.37)$$

$$\frac{\Gamma}{Q_1^2} = (v_z^2 - H_z^2) \left\{ -t_2 \bar{\alpha}_2 + \frac{\bar{\beta}_2}{8k^2} \right\} + H_{ze}^2 \times$$

$$\times \left\{ -t_{2e} \bar{\alpha}_{2e} + \frac{\bar{\beta}_{2e}}{8k^2} \right\}, \quad (5.38)$$

а величины  $\bar{\alpha}_2$ ,  $\bar{\alpha}_{2e}$ ,  $\bar{\beta}_2$  и  $\bar{\beta}_{2e}$  соответственно равны

$$\bar{\alpha}_2 = \frac{1}{4} - \frac{k^2 t_1}{2}; \quad \bar{\beta}_2 = \frac{k^4 t_1^2}{2} - \frac{3k^2}{2};$$

$$\bar{\alpha}_{2e} = \frac{1}{4} - \frac{k^2 t_{1e}}{2}; \quad \bar{\beta}_{2e} = \frac{k^4 t_{1e}^2}{2} - \frac{3k^2}{2} + \frac{3H_{\Phi e}^2}{2H_{ze}^2}. \quad (5.39)$$

С учетом уравнения (5.36) выражение (5.37) для  $D$  приводится к виду

$$t_1 D = (t_1 t_{2e} - t_{1e} t_2) H_{ze}^2 - (4t_2 - t_1) \frac{H_{\Phi e}^2}{4k^2}. \quad (5.40)$$

Разлагая бесселевы функции в ряд по аргументу, можно убедиться в том, что обращение  $D$  в нуль для длинных волн ( $kR_k \ll 1$ ) приводит к тем же значениям параметров положения заострения волн, которые были получены в § 4 методом разложения по обратной длине волны, если считать там малой амплитуду волны. Таким образом, и для периодических волн существует критический радиус  $R_{кр}$ , такой, что для  $R > R_{кр}$  заостряются гребни волн на поверхности, а при  $R < R_{кр}$  — их впадины. В случае отсутствия продольного тока этот радиус равен  $R_{кр} \simeq 0,65R_k$ .



Формула для поправки к квадрату фазовой скорости  $\Delta v_z^2$  для аксиально-симметричных волн имеет вид

$$\frac{t_1 \Delta v_z^2}{Q_1^2} = \frac{8\Gamma^2}{DQ_1^4} + (v_z^2 - H_z^2) \left\{ -8t_2 \bar{\alpha}_2^2 + \frac{k^2 t_1^2}{2} - \frac{1}{2} \right\} + \\ + H_{ze}^2 \left\{ -8t_{2e} \bar{\alpha}_{2e}^2 + \frac{k^2 t_{1e}^2}{2} - \frac{1}{2} \right\} - \frac{3H_{\varphi e}^2}{8k^2} (3 + 4k^2). \quad (5.41)$$

Мы ограничимся только длинноволновыми колебаниями ( $k \ll 1$ ), причем, поскольку волны при наличии кожуха рассмотрены в § 4, мы остановимся вкратце лишь на случае аксиально-симметричных колебаний плазменного шнура без кожуха. Для достаточно длинных волн, таких, что  $\ln \frac{1}{k} \gg 1$ , величины  $\Gamma$  и  $D$  приближенно равны

$$\Gamma = -\frac{9}{16} \ln k \cdot H_{ze}^2 - \frac{H_{\varphi e}^2}{8k^2}; \quad D = \frac{3}{4} \left( \ln k \cdot H_{ze}^2 - \frac{H_{\varphi e}^2}{8} \right). \quad (5.42)$$

Величина  $D$  отрицательна и в нуль не обращается, т. е. при отсутствии кожуха волны не заостряются. Поправка к квадрату фазовой скорости оказывается равной

$$\Delta v_z^2 = \frac{2Q_1^2}{3k^2} \cdot \frac{H_{\varphi e}^4 + 3H_{ze}^2 k^2 \ln k + 18(H_{ze}^2 k^2 \ln k)^2}{8H_{ze}^2 \ln k - H_{\varphi e}^2}. \quad (5.43)$$

Здесь знаменатель отрицателен, а в числителе стоит положительно определенная квадратичная форма. Следовательно, учет конечности амплитуды волны  $Q_1$  для случая длинноволновых аксиально-симметричных колебаний плазменного цилиндра без кожуха дает дополнительную неустойчивость. Аналогичный результат, как показано в § 4, справедлив и для случая аксиально-симметричных колебаний при наличии кожуха.

**В. Винтовые волны.** При рассмотрении нелинейных винтовых волн предположим, что продольная компонента поля  $B_z$  непрерывна на границе плазменного цилиндра. При этом плазменный шнур внутри идеально проводящего кожуха устойчив относительно всех мод колебаний, за исключением моды  $m = 1$ , т. е. извивания шнура, причем неустойчивость возникает при  $B_z = \frac{B_{\varphi}}{kR}$  (критерий Крускала—Шэфранова). Рассмотрим влияние конечности амплитуды волны в этом наиболее интересном случае на границе области устойчивости линейного приближения  $f'_e = \alpha R H_z - H_{\varphi} = 0$ . Полагая  $m = 1$ ;  $H_{ze} = H_z$ ;  $f'_e = 0$ ;  $f'_0 = 0$  и замечая, что для длинноволновых колебаний

$$t_m \simeq \frac{1}{m}; \quad t_{me} \simeq -\frac{1}{m} \cdot \frac{x^{2m} + 1}{x^{2m} - 1}, \quad (5.44)$$

находим амплитуду второй гармоники  $q_2 = \Gamma/D$ :

$$D = -\frac{H_{\varphi e}^2}{4}; \quad \Gamma = \frac{3H_{\varphi e}^2}{16} q_1^2. \quad (5.45)$$

В рассматриваемом случае  $D \neq 0$  и поправка к квадрату фазовой скорости пропорциональна квадрату амплитуды основной гармоники  $q_1$ :

$$\Delta v_z^2 = \frac{3-x^4}{x^4-1} H_z^2 q_1^2. \quad (5.46)$$

Из полученного выражения следует, что при  $x^4 = \left(\frac{R_k}{R}\right)^4 < 3$  или при  $R > 0,76R_k$  нелинейность стабилизирует неустойчивость, и наоборот, если  $R < 0,76R_k$ , то конечность амплитуды усиливает неустойчивость.

В заключение подчеркнем, что полученный здесь результат справедлив только при наличии поверхностного тока. В случае же непрерывности магнитного поля на границе плазменного цилиндра из линейной теории (см. § 3) следует возникновение неустойчивости при  $B_z = \frac{mB_\varphi}{kR}$ . Учет же нелинейных членов показывает (п1), что при этом волны на поверхности заостряются, и последнее обстоятельство делает невозможным вычисление (в рамках применяемых здесь методов) фазовой скорости волн.

## § 6. Линейные волны в сжимаемой плазменной струе

В § 2 выведено уравнение для линейных волн в плазменной струе в предположении ее несжимаемости. Здесь мы избавимся от этого ограничения. Исходной системой уравнений является система (I) в § 1, описывающая стационарные винтовые течения идеально проводящей жидкости в магнитном поле.

I. Считая, что в равновесном состоянии все величины зависят только от  $r$ , а скорость и магнитное поле имеют только азимутальную и продольную компоненты  $\mathbf{v} = \{0, v_\varphi, v_z\}$ ,  $\mathbf{B} = \{0, B_\varphi, B_z\}$ , легко получить связь равновесных распределений плотности, давления скорости и магнитного поля  $\mathbf{B} = \sqrt{4\pi\mathbf{H}}$ . Полагая  $\Phi = 0$ , мы получим

$$\frac{d}{dr} \left( p + \frac{H^2}{2} \right) + h_\varphi^2 - \rho v_\varphi^2 = 0, \quad (6.1)$$

где  $v_\varphi = \frac{v_\varphi}{r}$ ;  $h_\varphi = \frac{H_\varphi}{r}$ .

Возьмем функцию тока  $\xi$  в равновесном состоянии равной  $\bar{\xi} = \frac{r^2}{2}$ . Тогда при наличии волны  $\xi = \frac{r^2}{2} + \tilde{\xi}(r, \theta)$ . Равновесная плотность  $\bar{\rho}(r)$  также получает некоторое возмущение  $\tilde{\rho}(r, \theta)$ , так что  $\rho = \bar{\rho}(r) + \tilde{\rho}(r, \theta)$ . Связь между  $\tilde{\rho}$  и  $\tilde{\xi}$  получается из вто-

рого уравнения (I), если использовать то, что  $U$  зависит только от  $\xi$ . Дальнейшие вычисления аналогичны тем, которые были проведены в § 2. В линейном по  $\tilde{q}$  и  $\tilde{\xi}$  приближении, полагая

$$\tilde{\xi} = f(r) e^{im\theta}; \quad \tilde{q} - \frac{\tilde{q}'(r)}{r} \tilde{\xi} = g(r) e^{im\theta} \quad (6.2)$$

и имея в виду, что  $S = S(\xi)$ , найдем

$$g = -\frac{rs}{\beta G} f' - \frac{Q - b^2}{G} f, \quad (6.3)$$

где использованы обозначения  $G = \frac{c_T^2 s}{\varrho J_0^2} + \frac{H^2}{\varrho} - \frac{r^2 J_0^2}{\beta}$ ;

$$Q = \frac{2a}{\beta} + \varrho v_\varphi^2 - h_\varphi^2; \quad s = \varrho J_0^2 - J^2; \quad a = \varrho J_0 v_\varphi - J h_\varphi,$$

$$J_0 b = J_0 h_\varphi - J v_\varphi; \quad J = \alpha H_z - h_\varphi;$$

$$J_0 = \alpha (v_z - v_\varphi) - v_\varphi; \quad \alpha = \frac{k}{m}; \quad \beta = 1 + \alpha^2 r^2;$$

$\theta = \varphi - \alpha z$ ;  $v_\varphi = \frac{\omega}{k}$  — фазовая скорость волны;  $c_T = \left(\frac{\partial p}{\partial \varrho}\right)_S = \left(\frac{\gamma p}{\varrho}\right)^{1/2}$  — скорость звука.

Уравнение для возмущения  $\tilde{\xi}$  получается из первого уравнения системы (I), если использовать зависимость  $U' = U'(\xi)$  и учесть уравнение состояния  $p = \varrho k T$  и уравнение адиабаты  $p \varrho^{-\gamma} = \exp \frac{\gamma - 1}{k} S$ . Уравнение для  $\tilde{\xi}$  содержит  $\tilde{q}$ . Если исключить  $g(r)$  с помощью соотношения (6.3), то в результате получим уравнение для  $f(r)$

$$\left(\frac{rs}{1-\kappa} \frac{f'}{\beta}\right)' + \left\{ -\frac{m^2 s}{r} + \frac{4\alpha^2 r a^2}{\beta s} + \left(\frac{Q - \kappa b^2}{1-\kappa}\right)' + \frac{\kappa}{1-\kappa} \frac{\beta}{rs} (Q - b^2)^2 \right\} f = 0. \quad (6.4)$$

Здесь

$$\kappa = \frac{r^2 J_0^2}{\beta} \left( \frac{c_T^2 s}{\varrho J_0^2} + \frac{H^2}{\varrho} \right)^{-1}. \quad (6.5)$$

Аналогично предыдущему, если плазма граничит с идеально проводящим экраном, расположенным при  $r = R$ , то граничным условием будет  $f(R) = 0$ . Если же плазменный цилиндр удерживается внешним магнитным полем  $\mathbf{B}_e$ , то граничным условием

является условие баланса давлений  $p + \frac{H^2}{2} = \frac{H_e^2}{2}$  на возмущенной поверхности цилиндра  $r = R + \delta R(\theta)$ .

Будем описывать возмущенное внешнее поле функцией тока  $\psi_e = \frac{ar^2}{2} H_z^e - H_\varphi^e r \ln r + f_e(r) e^{im\theta}$ . Компоненты поля определяются через  $\psi_e(r, \theta)$  соотношениями  $rH_r^e = \frac{\partial \psi_e}{\partial \theta}$ ,  $arH_z^e - H_\varphi^e = = \frac{\partial \psi_e}{\partial r}$  и  $H_z^e + arH_\varphi^e = \text{const}$ . Радиальная часть возмущения  $f_e(r)$  удовлетворяет линейному уравнению (2.9), решениями которого являются производные от бесселевых функций  $rI'_m(amr)$  и  $rK'_m(amr)$ .

На невозмущенной поверхности плазменного цилиндра, граничащего с внешним магнитным полем, должно выполняться граничное условие

$$\left\{ \frac{rs}{1-\kappa} \frac{f'}{f} + \right. \\ \left. + \beta \frac{Q - \kappa b^2}{1-\kappa} + rJ_e^2 \frac{f'_e}{f_e} + \beta h_{\varphi e}^2 \right\}_{r=R} = 0, \quad (6.6)$$

которое вытекает из баланса давлений и требований

$$\xi|_{R+\delta R} = \text{const} \text{ и } \psi_e|_{R+\delta R} = \text{const}.$$

Величины  $J_e = aH_z^e - h_{\varphi e}$  и  $h_{\varphi e} = \frac{H_\varphi^e}{r}$  аналогичны введенным выше для внутреннего поля. Функция  $f_e(r)$  выбирается либо из требования убывания при  $r \rightarrow \infty$ , если рассматривается плазменный цилиндр в свободном пространстве, либо из условия  $f_e(R_3) = 0$ , если при  $r = R_3$  находится идеально проводящий экран и т. п. Отношение  $f'_e/f_e$  является однозначно определенной известной функцией, и для  $f_e(r)$ , как и в случае несжимаемой плазмы, мы имеем уравнение (6.4) с граничным условием типа Штурма—Лиувилля (6.6).

Отметим, что согласно определению  $\xi$  [см. третье соотношение (1)], радиальная часть  $f(r)$  возмущения  $\tilde{\xi}(r, \theta)$  пропорциональна радиальным частям  $v_r$  и  $H_r$ , т. е.  $f \sim \frac{rv_r}{J_0} \sim \frac{rH_r}{J}$  и соответственно  $f_e \sim \frac{rH_z^e}{J_e}$ .

Вблизи границы  $v_\varphi = 0$  области устойчивости покоящегося плазменного цилиндра ( $v_z = v_\varphi = 0$ ) величина  $\kappa \rightarrow 0$ , и, за исключением случая  $J = 0$ , в уравнении (6.4) можно пренебречь всеми членами  $\sim \kappa$ . Далее  $\kappa \rightarrow 0$  при  $c_T^2 \rightarrow \infty$  и при  $H^2 \rightarrow \infty$ . В тех

случаях, когда в уравнениях (6. 4) и (6. 6) можно пренебречь членами порядка  $\kappa$ , мы приходим к уравнениям [20]:

$$\left(\frac{rs}{\beta} f'\right)' + \left(-\frac{m^2s}{r} + \frac{4\alpha^2ra^2}{\beta s} + Q'\right)f = 0; \quad (6. 7)$$

$$\left\{\frac{rs}{\beta} \frac{f'}{f} + Q + \frac{rJ_e^2}{\beta} \frac{f'_e}{f_e} + h_{\varphi e}^2\right\}_{r=R} = 0, \quad (6. 8)$$

которые совпадают с полученными в § 2.

Поскольку уравнения (6. 4)—(6. 6) описывают волны общего винтового типа  $\sim \exp i(kz - m\varphi - \omega t)$ , то при  $k \rightarrow 0$  и  $k \rightarrow \infty$  из них легко получить уравнения соответственно для азимутальных и аксиально-симметричных волн.

II. Рассмотрим некоторые вопросы устойчивости вращающейся плазмы. Ограничимся случаем  $J = \alpha H_z - h_\varphi = 0$  или  $\kappa H = 0$ , когда возмущения направлены вдоль силовых линий магнитного поля. Если возмущения винтовые, то поскольку  $\alpha = \text{const}$ , этот случай реализуется при  $\mu \equiv \frac{h_\varphi}{rH_z} = \text{const}$ ; для аксиально-симметричных волн должно быть  $H = H_\varphi$ , а для азимутальных  $H = H_z$ .

При  $J = 0$  уравнение (6. 4) запишется в виде

$$\left(\frac{qrJ_0^2c_s^2f'}{\beta c_s^2 - r^2J_0^2}\right)' + \left\{-\frac{m^2qJ_0^2}{r} + \frac{4\alpha^2rqv_\varphi^2}{\beta} + \right. \\ \left. + \left(\frac{\beta c_s^2Q - r^2J_0^2h_\varphi^2}{\beta c_s^2 - r^2J_0^2}\right)' - \frac{r\beta(Q - h_\varphi^2)^2}{q(\beta c_s^2 - r^2J_0^2)}\right\}f = 0, \quad (6. 9)$$

где  $c_s^2 \equiv c_T^2 + \frac{H^2}{q}$ . Рассмотрим некоторые случаи, когда из уравнения (6. 9) можно просто получить условия появления неустойчивости, т. е. условия существования решений с частотой  $\omega$ , содержащей мнимую часть.

1. а. Пусть плазма вращается как целое\* ( $v_\varphi = \text{const}$ ), так что  $J_0 = -\alpha v_\varphi - v_\varphi = \text{const}$ . Тогда при  $J_0 \rightarrow 0$  уравнение (6. 9) примет вид

$$\left(\frac{qr}{\beta} f'\right)' + \left\{-\frac{m^2q}{r} + \frac{1}{J_0^2} \left[ \frac{4\alpha^2rqv_\varphi^2}{\beta} + (qv_\varphi^2 - h_\varphi^2)' - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{r(qv_\varphi^2 - 2h_\varphi^2)^2}{qc_s^2} \right] \right\} f = 0. \quad (6. 10)$$

Отсюда следует [22], что необходимым условием устойчивости ( $J_0^2 > 0$ ) плазменного цилиндра, граничащего с идеально проводящим кожухом, по отношению к винтовым возмущениям является

\* Здесь это ограничение не является существенным.

положительность выражения в квадратных скобках в уравнении (6. 10):

$$\frac{4\alpha^2 r \varrho v_\varphi^2}{\beta} + (\varrho v_\varphi^2 - h_\varphi^2)' - \frac{r(\varrho v_\varphi^2 - 2h_\varphi^2)^2}{\varrho c_s^2} > 0. \quad (6. 11)$$

б. Если плазменный цилиндр с однородным продольным током ( $h_\varphi = \text{const}$ ) вращается как целое ( $v_\varphi = \text{const}$ ), то для длинноволновых колебаний ( $\alpha^2 r^2 \ll 1$ ) в случае  $v_\varphi^2 \ll c_s^2$  уравнение (6. 9) дает

$$(\varrho r f')' + \left\{ -\frac{m^2 \varrho}{r} + \frac{\varrho'}{J_0^2} (2J_0 v_\varphi + v_\varphi^2) \right\} f = 0. \quad (6. 12)$$

Рассмотрим цилиндр со свободной границей и без поверхностных токов; тогда  $J_e(R) = 0$ , и граничное условие (6. 6) записывается в виде

$$\left\{ J_0^2 \frac{r f'}{f} + 2J_0 v_\varphi + v_\varphi^2 \right\}_{r=R} = 0. \quad (6. 13)$$

Уравнение (6. 12) и граничное условие (6. 13) удовлетворяются решением  $f \sim r^m$ , откуда для частоты  $\omega$  получим выражение

$$\omega = v_\varphi (1 - m \pm \sqrt{1 - m}). \quad (6. 14)$$

Если продольного тока нет, то рассматриваемый здесь случай  $J = 0$  соответствует азимутальным волнам. Неустойчивость азимутальных волн описана в работе [23], а для конкретного распределения плотности  $\varrho \sim \exp(-qr^2)$  — в работе [24]. При  $\varrho = \text{const}$  уравнение (6. 7) решается точно [см. решение (3. 6)], и для длинноволновых колебаний мы получим, естественно, ту же формулу для  $\omega$ , поскольку она не содержит  $\varrho$ . Таким образом, при произвольной зависимости  $\varrho(r)$  вращающийся как целое плазменный шнур со свободной границей гидродинамически неустойчив относительно возмущений, параллельных  $\mathbf{V}$ . Инкремент развития неустойчивости  $v_\varphi \sqrt{m - 1}$  растет с  $m$ , что указывает на тенденцию к расшнуровыванию вращающейся плазмы.

2. Для аксиально-симметричных волн во вращающейся плазме при  $H = H_\varphi$ , уравнение (6. 9) принимает вид

$$\left( \frac{\varrho c_s^2}{c_s^2 - v_\varphi^2} \frac{f'}{r} \right)' + \left\{ -\frac{k^2 \varrho}{r} + \frac{4\varrho v_\varphi^2}{r v_\varphi^2} + \left[ \frac{c_s^2 (\varrho v_\varphi^2 - h_\varphi^2) - v_\varphi^2 h_\varphi^2}{v_\varphi^2 (c_s^2 - v_\varphi^2)} \right]' - \frac{r(\varrho v_\varphi^2 - 2h_\varphi^2)^2}{\varrho v_\varphi^2 (c_s^2 - v_\varphi^2)} \right\} f = 0. \quad (6. 15)$$

При  $v_\varphi^2 \rightarrow 0$  из него получается уравнение типа (6. 10), откуда следует необходимое условие устойчивости

$$\frac{4\varrho v_\varphi^2}{r} + (\varrho v_\varphi^2 - h_\varphi^2)' - \frac{r(\varrho v_\varphi^2 - 2h_\varphi^2)^2}{\varrho c_s^2} > 0. \quad (6. 16)$$

Достаточность этого условия по отношению к аксиально-симметричным возмущениям установлена в работе [19]. Для невращающейся плазмы ( $v_\varphi = 0$ ) условие (6. 16) совпадает с необходимым условием устойчивости плазмы с замкнутыми силовыми линиями магнитного поля, которое вытекает из критерия Кадомцева [25]

$$-\omega \left( \frac{\nabla u}{u} \right)^2 < \nabla u \nabla p < \gamma p \frac{(\nabla u)^2}{|u|}, \quad (6. 17)$$

где  $u = -\oint \frac{dl}{H}$ ,  $\omega = \oint H dl$  при  $H = H_\varphi$ .

3. Для азимутальных волн ( $J_0 = -\frac{\omega}{m} - v_\varphi$ ) при  $H = H_z$  уравнение (6. 9) дает

$$\left( \frac{qrJ_0^2 c_s^2 f'}{c_s^2 - r^2 J_0^2} \right)' + \left\{ -\frac{m^2 J_0^2 q}{r} + \left[ \frac{c_s^2 (2qJ_0 v_\varphi + qv_\varphi^2)}{c_s^2 - r^2 J_0^2} \right]' - \frac{r (2qJ_0 v_\varphi + qv_\varphi^2)^2}{q (c_s^2 - r^2 J_0^2)} \right\} f = 0. \quad (6. 18)$$

Устремляя  $J_0$  к нулю, аналогично предыдущему получим критерий устойчивости относительно азимутальных (желобковых) возмущений в виде

$$(qv_\varphi^2)' - \frac{qr v_\varphi^4}{c_s^2} > 0. \quad (6. 19)$$

Формула (6. 19) показывает, что в случае однородного вращения ( $v_\varphi = \text{const}$ ) для устойчивости необходимо  $q' > 0$ .

## П Р И Л О Ж Е Н И Е

**Кривизна и кручение координатной линии  $x_3$  в случае, когда  $\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_3} = 0$ .**

Покажем, что требование  $\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_3} = 0$  эквивалентно требованию винтовой симметрии задачи, и следовательно, общим видом двухпараметрических течений являются винтовые течения. Доказательство основывается на том, что кривизна  $1/R$  и кручение  $1/T$  координатной линии  $x_3$  выражается через компоненты метрического тензора  $g_{ik}$ . Поскольку по предположению  $\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_3} = 0$ , то  $R$  и  $T$  постоянны вдоль линии  $x_3$ , откуда и следует, что  $x_3$  — винтовая линия.

Будем исходить из формул Френэ

$$\frac{d\tau}{ds} = \frac{n}{R}; \quad \frac{dn}{ds} = -\frac{\tau}{R} + \frac{b}{T}; \quad \frac{db}{ds} = -\frac{n}{T}, \quad (1)$$

где  $\tau = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$  — единичный вектор касательной к линии  $x_3$ ,  $\mathbf{n}$  — нормаль,  $\mathbf{b}$  — бинормаль. Для определения  $R$  и  $T$  используем выражения

$$\frac{1}{R^2} = \left( \frac{d\tau}{ds} \right)^2; \quad \frac{1}{T} = R^2 \left[ \tau \frac{d\tau}{ds} \right] \frac{d^2\tau}{ds^2}, \quad (2)$$

которые легко получить из формул (1), если учесть, что  $\mathbf{b} = [\tau\mathbf{n}]$ .

В криволинейных координатах  $x_i$  дифференциал  $d\mathbf{r}$  записывается в виде  $d\mathbf{r} = \mathbf{l}_i dx_i$ , а единичный вектор  $\tau$  и элемент дуги вдоль линии  $x_3$  равны

$$\tau = \frac{\mathbf{l}_3}{\sqrt{g_{33}}}; \quad ds = \sqrt{g_{33}} dx_3 \quad (3)$$

Подставляя эти выражения в формулы (2), получим

$$\frac{1}{R^2} = \frac{1}{g_{33}^2} \left( \frac{\partial \mathbf{l}_3}{\partial x_3} \right)^2; \quad \frac{1}{T} = \frac{R^2}{g_{33}^3} \left[ \mathbf{l}_3 \frac{\partial \mathbf{l}_3}{\partial x_3} \right] \frac{\partial^2 \mathbf{l}_3}{\partial x_3^2}. \quad (4)$$

Производные от  $\mathbf{l}_i$  выражаются через  $g_{ik} = (\mathbf{l}_i | \mathbf{l}_k)$  следующими уравнениями векторного анализа:

$$\frac{\partial \mathbf{l}_i}{\partial x_k} = \Gamma_{ik}^l \mathbf{l}_l \quad (5)$$

где

$$\Gamma_{ik}^l = g^{lm} \Gamma_{mik}; \quad 2\Gamma_{jkl} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_l} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x_k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x_i}. \quad (6)$$

Таким образом, сделанное выше утверждение, что  $\frac{\partial R}{\partial x_3} = \frac{\partial T}{\partial x_3} = 0$ , если  $\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_3} = 0$ , доказано.

Для нахождения явного выражения  $T$  и  $R$  через  $g_{ik}$  следует подставить соотношения (5) и (6) в формулы (4). В результате несколько громоздких преобразований с использованием тензорных тождеств

$$g_{il} g^{lk} = \mathbf{l}_i | \mathbf{l}^k = \delta_{ik}, \quad [\mathbf{l}_i | \mathbf{l}_k] = \sqrt{g} e^{ijk} |^j, \quad g_{ik} = g G_{ik}, \\ g^{ik} = \frac{G_{ik}}{g},$$

где  $G_{ik}$  и  $G^{ik}$  — миноры  $g^{ik}$  и  $g_{ik}$ , а  $g = \text{Det}(g_{ik})$ , мы получим

$$\frac{1}{R^2} = \frac{g^{ik}}{4g_{33}^2} \frac{\partial g_{33}}{\partial x_i} \frac{\partial g_{33}}{\partial x_k} = \frac{1}{4g_{33}^2} \left[ g^{11} \left( \frac{\partial g_{33}}{\partial x_1} \right)^2 + \right. \\ \left. + 2g^{12} \frac{\partial g_{33}}{\partial x_1} \frac{\partial g_{33}}{\partial x_2} + g^{22} \left( \frac{\partial g_{33}}{\partial x_2} \right)^2 \right]; \quad (7)$$

$$\frac{1}{T} = \frac{R^2}{8\sqrt{g}g_{33}} \left[ g^{11} \left( \frac{\partial g_{33}}{\partial x_1} \right)^2 - g^{22} \left( \frac{\partial g_{33}}{\partial x_2} \right)^2 \right] \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{g_{23}}{g_{33}} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{g_{13}}{g_{33}} \right) \right]. \quad (8)$$

Исходя из формул Френэ легко убедиться, что линии с постоянными  $R$  и  $T$  в общем случае являются винтовыми линиями.



Выражения (7)—(8) показывают также, что при вычислениях в ортогональных координатах ( $g_{12} = g_{13} = g_{23} = 0$ ) кручение линии  $x_3$  равно нулю, и следовательно, требование  $\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_3} = 0$  эквивалентно ограничению аксиальной или трансляционной симметрией.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Chandrasekhar S. *Astrophys. J.*, **124**, 232 (1956).
2. Ткалич В. «Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение», № 4, 134 (1959); там же, № 5, 122 (1959).
3. Ткалич В. «Прикладная математика и механика», **26**, вып. 1 (1962).
4. Chandrasekhar S., Prendergast K. *Proc. Nat. Acad. Sci.*, **42**, 5 (1956).
5. Шафранов В. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **33**, 3 (9), 1957.
6. Джонсон, Оберман, Кулсруд, Фримен. Некоторые устойчивые магнитогидродинамические равновесные конфигурации. В кн. «Труды Второй международной конференции по мирному использованию атомной энергии». Избр. докл. иностр. ученых. Т. 1. — «Физика горячей плазмы и термоядерные реакции». М., Атомиздат, 1959, стр. 193.
7. Кадомцев Б. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **37**, 5 (11), 1959.
8. Лэмб Г. Гидродинамика. М., Гостехиздат, 1947.
9. Крускал и Кулсруд. Равновесие удерживаемой магнитным полем плазмы в тороиде. В кн. «Труды Второй международной конференции по мирному использованию атомной энергии». Избр. докл. иностр. ученых. Т. 1. — «Физика горячей плазмы и термоядерные реакции». М., Атомиздат, 1959, стр. 221.
10. Соловьев Л. «Ж. техн. физ.», **31**, 4 (1961).
11. Некрасов А. Точная теория волн установившегося вида на поверхности тяжелой жидкости. М., Изд-во АН СССР, 1951.
12. Levi-Civita T. *Math. Ann.*, **93**, 264 (1925).
13. Теория поверхностных волн. Сборник статей. М., Изд-во иностр. лит., 1959.
14. Taublog R. *Proc. Phys. Soc.*, **70** B, 1049 (1958).
15. Вандакуров Ю., Лурье К. «Ж. техн. физ.», **29**, вып. 9 (1959).
16. Шафранов В. Об устойчивости плазменного шнура с распределенным током. В кн. «Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций». Т. IV. М., Изд-во АН СССР, 1958, стр. 61.
17. Кадомцев Б. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **37**, 6 (12), 1959.
18. Сайдем Б. Устойчивость самосжатого линейного разряда. В кн. «Труды Второй международной конференции по мирному использованию атомной энергии». Избр. докл. иностр. ученых. Т. 1 — «Физика горячей плазмы и термоядерные реакции». М., Атомиздат, 1959, стр. 89.
19. Веденов А., Велихов Е., Сагдеев Р. «Усп. физ. наук», **73**, 4 (1961).
20. Соловьев Л. «Докл. АН СССР», **147**, 6 (1962).
21. Соловьев Л. «Ж. техн. физ.», **32**, 8 (1962).
22. Сансоне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Т. I. М., Изд-во иностр. лит., 1953, стр. 198.
23. Вандакуров Ю. «Ж. техн. физ.», **33**, 9 (1963).
24. Rosenbluth M., Krall N., Rostoker N. «Ядерный синтез». Приложение, ч. I, 1962, стр. 143.
25. Кадомцев Б. О конвективной неустойчивости плазмы. В кн. «Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций». Т. IV. М., Изд-во АН СССР, 1958, стр. 380.

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>Электромагнитные волны в плазме. В. Д. Шафранов . . . . .</b>	<b>3</b>
Введение . . . . .	3
§ 1. Дисперсионное уравнение (общие соотношения) . . . . .	4
§ 2. Плазма без магнитного поля. Гидродинамическое приближение . . . . .	12
§ 3. Плазма в магнитном поле. Гидродинамическое приближение . . . . .	18
§ 4. Резонансы при учете теплового движения . . . . .	36
§ 5. Затухание плазменных колебаний . . . . .	39
§ 6. Уравнения Максвелла в анизотропной среде с пространственной дисперсией . . . . .	45
§ 7. Задача о собственных колебаниях плазмы и о распространении электромагнитных волн в плазме . . . . .	56
§ 8. Корреляционная функция микротоков . . . . .	62
§ 9. Электрическая проницаемость . . . . .	70
§ 10. Колебания плазмы в магнитном поле с учетом теплового движения зарядов при $B_0 = 0$ . . . . .	78
§ 11. Колебания плазмы в магнитном поле с учетом теплового движения зарядов при $B_0 \neq 0$ . . . . .	81
§ 12. Потери энергии при движении заряда в плазме . . . . .	94
§ 13. Влияние силы радиационного трения и флуктуационных полей на движение заряда в плазме . . . . .	108
§ 14. Флуктуации в плазме. Рассеяние волн . . . . .	117
§ 15. Уравнение переноса энергии электромагнитных колебаний . . . . .	127
<i>Приложение I. Вывод соотношения (4.9) . . . . .</i>	<i>131</i>
<i>Приложение II. Вывод соотношения (9.20) . . . . .</i>	<i>131</i>
<i>Приложение III. Вывод уравнений Максвелла, позволяющих описывать флуктуационные поля . . . . .</i>	<i>133</i>
<i>Литература . . . . .</i>	<i>138</i>
<b>Колебания неоднородной плазмы. А. Б. Михайловский . . . . .</b>	<b>141</b>
Введение . . . . .	141
§ 1. Диэлектрическая проницаемость неоднородной плазмы . . . . .	141
§ 2. Дрейфовая неустойчивость плазмы . . . . .	152
§ 3. Обзор работ по дрейфовой неустойчивости . . . . .	160
§ 4. Прогресс в методике исследования колебаний неоднородной плазмы . . . . .	171
§ 5. Дрейфовая неустойчивость плазмы в поле с переменным шагом . . . . .	179
§ 6. Желобковая неустойчивость плазмы при конечном ларморовском радиусе ионов . . . . .	182
§ 7. Дрейфовая раскачка желобковых возмущений . . . . .	190
<i>Приложение I. Тензор <math>\epsilon_{\alpha\beta}(k, \omega, y)</math> для плазмы с неизотропией функцией распределения центров ларморовских кружков . . . . .</i>	<i>193</i>
<i>Приложение II. Тензор <math>\epsilon_{\alpha\beta}(k, \omega, y)</math> для плазмы, находящейся в поле тяжести . . . . .</i>	<i>194</i>
<i>Приложение III. Диэлектрическая проницаемость плазмы в винтовом магнитном поле . . . . .</i>	<i>195</i>
<i>Приложение IV. Исходные уравнения для некоторых типов колебаний . . . . .</i>	<i>201</i>
<i>Литература . . . . .</i>	<i>202</i>

<b>Введение в теорию слаботурбулентной плазмы. А. А. Веденов</b> . . . . .	203
Взаимодействие плазмонов с частицами . . . . .	203
Основные уравнения квазилинейной теории . . . . .	205
Релаксация плазменных колебаний . . . . .	216
Развитие возмущений в неустойчивой плазме . . . . .	225
Взаимодействие пучка с плазмой . . . . .	227
Эффект порогового поглощения волн в плазме и турбулентный нагрев	231
Плазмон-плазмонное взаимодействие . . . . .	234
Трехплазмонные процессы . . . . .	235
Процессы высших порядков . . . . .	240
<i>Литература</i> . . . . .	244
<b>Симметричны магнитогидродинамические течения и винтовые воли</b>	
<b>в круглом плазменном цилиндре. Л. С. Соловьев</b> . . . . .	245
Введение . . . . .	245
§ 1. Стационарные винтовые течения . . . . .	246
§ 2. Винтовые волны . . . . .	255
§ 3. Об устойчивости цилиндрической плазменной струи в магнитном	
поле . . . . .	262
§ 4. Нелинейные длинноволновые аксиально-симметричные коле-	
бания плазменного цилиндра . . . . .	267
§ 5. Нелинейные винтовые волны . . . . .	272
§ 6. Линейные волны в сжимаемой плазменной струе . . . . .	282
<i>Приложение. Кривизна и кручение координатной линии <math>x_3</math> в случае,</i>	
<i>когда <math>dg_{ik}/dx_3 = 0</math></i> . . . . .	287
<i>Литература</i> . . . . .	289

## ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ

Стр.	Строка	Напечатано	Должно быть
108	2-я сверху	$v_t$	$v_z$
234	16-я снизу	$\int v$	$f v$
254	4-я »	$\frac{1}{2} (a^2 s')$	$\frac{1}{2} (a^2 s)'$
285	14-я сверху	$\frac{h\varphi}{rH_z}$	$\frac{h\varphi}{H_z}$

На стр. 202 в пункте 31 по вине типографии допущена ошибка. Следует читать:

31. Сайдем Б. Р. В кн. «Труды Второй международной конференции по мирному использованию атомной энергии». Избр. докл. иностр. ученых. Т. 1 — Физика горячей плазмы и термоядерные реакции. М., Атомиздат, 1959, стр. 89.

32. Михайловская Л. В., Михайловский А. Б. «Ядерный синтез», 3, вып. 2 (1963).

---

Вопросы теории плазмы. Вып. 3. Зак. 1526.

### ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ПЛАЗМЫ

В Ы П У С К 3

Редактор *А. П. Бутусов*

Переплет художника *Ю. К. Мосеева*

Техн. редактор *Е. И. Мазель*

Корректор *Т. А. Салдатенкова*

\*  
Сдано в набор 13/VII 1963 г.

Подписано в печ. 2/X 1963 г.

Бумага 60×90/16 Физич. печ. л. 18,25

Уч.-изд. л. 18,24 Заказ изд. 1080

Тираж 6800 экз. Т-08893

Цена 1 р. 01 к. Заказ тип. 1526

Госатомиздат, Москва, Центр.

ул. Кирова, 18

\*

Тип. № 6 УЦБ и ПП Ленсовнархоза,

Ленинград, ул. Моисеенко, 10

ВОПРОСЫ  
ТЕОРИИ  
ПЛАЗМЫ

---

ГОСАТОМИЗДАТ·1963